BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

CỘNG HÒA XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM
Độc lập – Tự do – Hạnh phúc

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề thi gồm có 01 trang)

ĐỀ THI TUYỂN SINH
VÀO TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG CHUYÊN NĂM 2022
Môn thi: TOÁN

(Dùng cho mọi thí sinh thi vào trường chuyên)
Thời gian làm bài: 90 phút (không kể thời gian phát đề)

Bài 1. (1,5 điểm) Cho $A=\left(\dfrac{x+\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}-2}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}\right):\dfrac{1}{x-1}$ $(x\geq 0;\ x\neq 1)$.

a) Rút gọn A.

b) Tìm các số nguyên x sao cho $\dfrac{1}{A}$ là số nguyên dương.

Bài 2. (2,5 điểm)

a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, hãy viết phương trình đường thẳng $(d): y=ax+b$ biết đường thẳng (d) đi qua điểm $A(2;-1)$ và song song với đường thẳng $y=-3x+1$.

b) Một cửa hàng kinh doanh điện máy sau khi nhập về chiếc tivi, đã bán chiếc tivi đó; cửa hàng thu được tiền lãi là 10% của giá nhập về. Giả sử cửa hàng tiếp tục nâng giá bán chiếc tivi đó thêm 5% của giá đã bán, nhưng bớt cho khách hàng 245000 đồng, khi đó cửa hàng sẽ thu được tiền lãi là 12% của giá nhập về. Tìm giá tiền khi nhập về của chiếc tivi đó.

Bài 3. (3,0 điểm)

Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O), điểm D thuộc cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$ (D khác A và B). Các tiếp tuyến với đường tròn (O) tại B và C cắt AD theo thứ tự tại E và G. Gọi I là giao điểm của CE và BG.

a) Chứng minh rằng $\Delta EBC \sim \Delta BCG$.

b) Tính số đo góc BIC. Từ đó, hãy chứng minh rằng tứ giác $BIDE$ nội tiếp.

c) Gọi K là giao điểm của DI và BC. Chứng minh rằng $BK^2=KI.KD$.

Bài 4. (3,0 điểm)

a) Tìm các số thực x sao cho $a=x+\sqrt{2}$ và $b=x^3+5\sqrt{2}$ đồng thời là hai số hữu tỉ.

b) Biết rằng:

phương trình bậc hai $x^2+a_1x+b_1=0$ có hai nghiệm phân biệt là x_0 và x_1;

phương trình bậc hai $x^2+a_2x+b_2=0$ có hai nghiệm phân biệt là x_0 và x_2;

...

phương trình bậc hai $x^2+a_{2022}x+b_{2022}=0$ có hai nghiệm phân biệt là x_0 và x_{2022}.

Chứng minh rằng số thực $\alpha=\dfrac{x_1+x_2+...+x_{2022}}{2022}$ là nghiệm của phương trình bậc hai:

$$x^2+\left(\frac{a_1+a_2+...+a_{2022}}{2022}\right)x+\left(\frac{b_1+b_2+...+b_{2022}}{2022}\right)=0.$$

--------------------*Hết*--------------------

Ghi chú: Học sinh không được sử dụng tài liệu, cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ tên thí sinh: .... Số báo danh: ....

Giải chi tiết đề thi Toán điều kiện trường THPT chuyên Sư Phạm

Nguyễn Duy Khương - Trịnh Đình Triển - TQĐ - Nguyễn Khang - Nguyễn Hoàng Việt

1 Câu 1

Cho $A = \left(\dfrac{x+\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}-2} + \dfrac{1}{\sqrt{x}-1} + \dfrac{1}{\sqrt{x}+2}\right) : \dfrac{1}{x-1}\,(x \geq 0; x \neq 1)$.

1. Rút gọn P.
2. Tìm các số nguyên x sao cho $\dfrac{1}{A}$ là số nguyên dương

Lời giải.

1. ĐKXĐ:$x \geq 0; x \neq 1$;

   Ta có:
$$A = \left(\frac{x+\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt{x}+2}\right) : \frac{1}{x-1}$$
$$A = \frac{x+\sqrt{x}+1+\sqrt{x}+2+\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)}.(x-1)$$
$$A = \frac{x+3\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}.(\sqrt{x}+1)$$
$$A = \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}+2}.(\sqrt{x}+1)$$
$$A = (\sqrt{x}+1)^2$$

2. Ta có: $\dfrac{1}{A} = \dfrac{1}{(\sqrt{x}+1)^2}$

   Lại có: $\sqrt{x}+1 \geq 1 \Rightarrow (\sqrt{x}+1)^2 \geq 1 > 0 \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{A} \leq 1$

   Mà $\dfrac{1}{A}$ nguyên dương, nên $\dfrac{1}{A} = 1 \Leftrightarrow x = 0$

   Vậy $x = 0$

2 Câu 2

a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, hãy viết phương trình đường thẳng (d): $y = ax+b$ biết (d) đi qua $A(2;-1)$ và song song với đường thẳng $y = -3x+1$.

b) Một cửa hàng kinh doanh điện máy sau khi nhập về chiếc tivi, đã bán chiếc tivi đó; cửa hàng thu được lãi là 10% của giá nhập về. Giả sử cửa hàng tiếp tục nâng giá bán chiếc tivi đó thêm 5% của giá đã bán, nhưng bớt cho khách hàng 245000 đồng, khi đó cửa hàng sẽ thu được tiền lãi là 12% của giá nhập về. Tìm giá tiền khi nhập về của chiếc tivi đó.

Lời giải.

a) Ta có đường thẳng d đi qua điểm $A(2;-1)$ nên ta có $2a+b=-1$.
Mặt khác (d) song song với $y=-3x+1$ nên

$$\begin{cases} a=-3 \\ b\neq 1 \\ 2a+b=-1 \end{cases} \Rightarrow a=-3; b=5.$$

Vậy phương trình đường thẳng d là $y=-3x+5$.

b) Gọi giá nhập về của chiếc tivi đó là x (đồng). Theo đề cửa hàng thu lãi $\frac{x}{10}$, tức là giá đã bán là $x+\frac{x}{10}$. Nếu cửa hàng tiếp tục nâng giá bán chiếc tivi đó thêm 5% giá đã bán và bớt cho khách hàng 245000 đồng, khi đó giá bán ra là $x+\frac{x}{10}+\frac{5}{100}\left(x+\frac{x}{10}\right)-245000$. Theo đề khi đó cửa hàng thu lãi là 12% của giá nhập về, kéo theo

$$x+\frac{x}{10}+\frac{5}{100}\left(x+\frac{x}{10}\right)-245000 = x+\frac{12}{100}x.$$

Từ đó dễ tính được $x=7000000$.
Vậy giá nhập về của chiếc tivi đó là 7 triệu đồng.

3 Câu 3

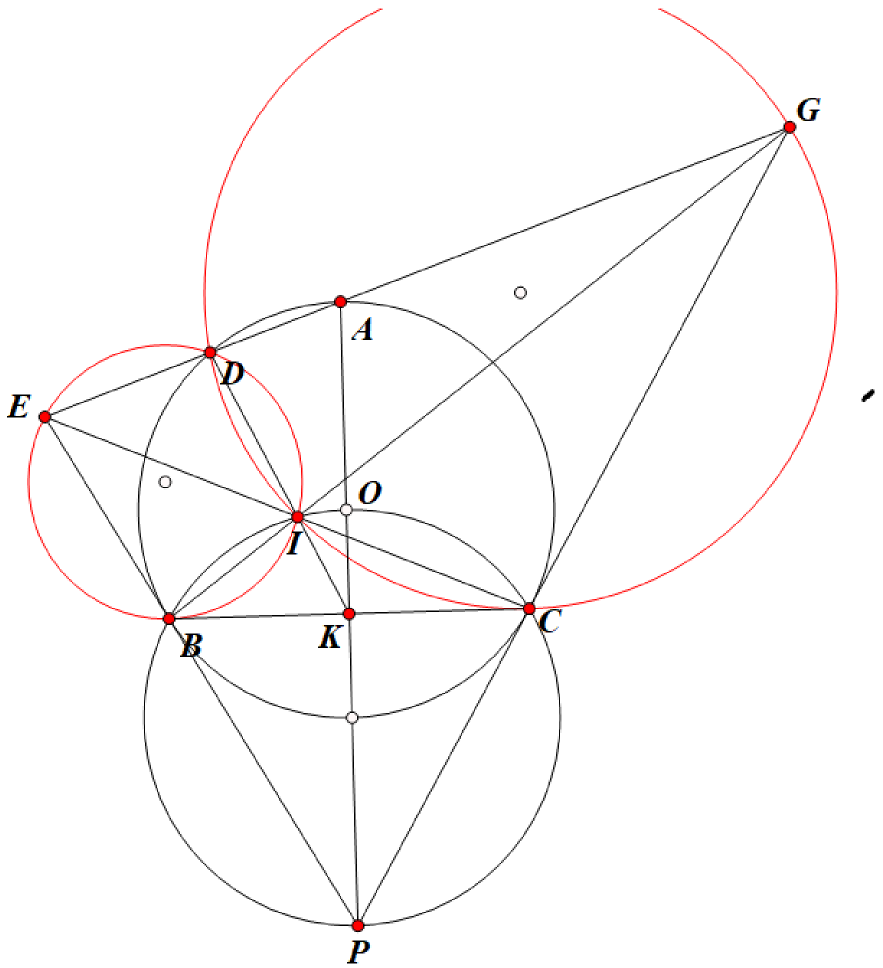
Cho tam giác ABC đều nội tiếp (O), điểm D thuộc cung AB nhỏ (D khác A,B). Các tiếp tuyến tại B,C của (O) cắt AD theo thứ tự tại E,G. Gọi I là giao điểm của CE và BG.

a) Chứng minh rằng $\triangle EBC \backsim \triangle BCG$.

b) Tính số đo góc BIC. Từ đó chỉ ra $BIDE$ là tứ giác nội tiếp.

c) Gọi $DI \cap BC = K$. Chứng minh rằng: $BK^2 = KI.KD$.

Lời giải.



a) Gọi tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau tại P. $\widehat{EBC} = 180^\circ - \widehat{PBC} = 180^\circ - \widehat{PCB} = \widehat{GCB}$.

Gọi đường tròn ngoại tiếp tam giác DEB cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác GCD tại I' khác D. Ta có: $\widehat{DI'B} = 180^\circ - \widehat{DEB}$ và $\widehat{DI'C} = 180^\circ - \widehat{DGC}$ chú ý rằng: $\widehat{BPC} = 180^\circ - \widehat{BOC} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ Do đó: $\widehat{BI'C} = 120^\circ$. Lại có:

$\widehat{BDE} = \widehat{EI'B} = 60^\circ$ (do tứ giác $DACB$ nội tiếp và $EDI'B$ nội tiếp) dẫn đến: E, I', C thẳng hàng. Tương tự: G, I', B thẳng hàng dẫn đến: I trùng I'.

Do đó thu được: $\widehat{BIC} = \widehat{EBC} = \widehat{GBC}$ dẫn đến các tam giác EBC và BIC và BCG đồng dạng với nhau.

b) Từ câu a) ta đã chỉ ra $\widehat{BIC} = 120^\circ$ và $BIDE$ nội tiếp.

c) Ta có: $\widehat{CIB} = \widehat{KIB} = \widehat{BEI} = \widehat{IDB}$ dẫn đến tam giác KIB đồng dạng tam giác KBD suy ra: $\dfrac{KI}{KB} = \dfrac{KB}{KD}$ suy ra: $BK^2 = KI.KD$.

Nhận xét. Ta còn có thể chỉ ra K là điểm cố định khi D di động trên cung AB nhỏ của (O).

□

4 Câu 4

a) Tìm các số thực x sao cho $a = x + \sqrt{2}$ và $b = x^3 + 5\sqrt{2}$ đồng thời là hai số hữu tỉ.

b) Biết rằng

- Phương trình bậc hai $x^2 + a_1 x + b_1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt là x_0 và x_1.
- Phương trình bậc hai $x^2 + a_2 x + b_2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt là x_0 và x_2.
- ...
- Phương trình bậc hai $x^2 + a_{2022} x + b_{2022} = 0$ có hai nghiệm phân biệt là x_0 và x_{2022}.

Chứng minh rằng số thực $\alpha = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{2022}}{2022}$ là nghiệm của phương trình bậc hai

$$x^2 + \left(\frac{a_1 + \cdots + a_{2022}}{2022}\right) x + \frac{b_1 + \cdots + b_{2022}}{2022} = 0. \qquad (*)$$

Lời giải.

a) Đặt $a = x + \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} x^3 + 5\sqrt{2} &= (a - \sqrt{2})^3 + 5\sqrt{2} \\ &= a^3 - 3a^2\sqrt{2} + 3a \cdot 2 - 2\sqrt{2} + 5\sqrt{2} \\ &= a^3 + 6a + 3\sqrt{2}(1 - a^2). \end{aligned}$$

Vì $a \in \mathbb{Q}$ nên ta suy ra $a^3 + 6a \in \mathbb{Q}$. Suy ra

$$3\sqrt{2}(1 - a^2) = (x^3 + 5\sqrt{2}) - (a^3 + 6a) \in \mathbb{Q}.$$

Mặt khác, vì $1 - a^2$ cũng là số hữu tỉ nên số $3\sqrt{2}(1 - a^2)$ chỉ có thể là số hữu tỉ khi nó bằng 0. Nói cách khác, a phải là số thỏa mãn $3\sqrt{2}(1 - a^2) = 0$ hay $a^2 = 1$. Suy ra $a \in \{-1; 1\}$. Như vậy, ta có

$$x = a - \sqrt{2} \in \{-1 - \sqrt{2}; 1 - \sqrt{2}\}.$$

b) Trước hết, ta có thể dự đoán x_0 là nghiệm của phương trình (*). Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} &2022\left(x_0^2 + \left(\frac{a_1 + \cdots + a_{2022}}{2022}\right)x_0 + \frac{b_1 + \cdots + b_{2022}}{2022}\right) \\ &= 2022x_0^2 + (a_1 + \cdots + a_{2022})x_0 + (b_1 + \cdots + b_{2022}) \\ &= (x_0^2 + a_1x_0 + b_1) + \cdots + (x_0^2 + a_{2022}x_0 + b_{2022}) = 0 \end{aligned}$$

Do đó, để chứng minh α là nghiệm của phương trình (*), ta chỉ cần sử dụng định lí Viete đảo. Nói cách khác, ta chỉ cần chứng minh

$$\begin{cases} x_0 + \alpha = -\dfrac{a_1 + \cdots + a_{2022}}{2022} \\ x_0\alpha = \dfrac{b_1 + \cdots + b_{2022}}{2022} \end{cases} \tag{1}$$

Bây giờ, áp dụng định lí Viete cho các phương trình đề bài, ta có

$$\begin{cases} x_0 + x_i = -a_i \\ x_0x_i = b_i, \text{ với mọi } i = 1, \ldots, 2022. \end{cases} \tag{2}$$

Cộng theo vế từ các hệ phương trình (2), ta suy ra hệ phương trình (1) là đúng. Bài toán được chứng minh.