

Câu 1. (3,5 điểm)

a. Giải phương trình $(x^2 - x + 1)(x^2 + 4x + 1) = -4x^2$.

b. Giải phương trình $\sqrt{x+3} + \sqrt{5-x} - 2\sqrt{15+2x-x^2} = -4$.

c. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy + 3x = 14y \\ (x^2 + 3x)(x + y - 3) = 18y \end{cases}$$

Câu 2. (1,5 điểm)

a. Tìm tất cả các số nguyên tố p và q sao cho $p^2 + 3pq + 4q^2$ là một số chính phương.

b. Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho tồn tại các số tự nhiên x, y thỏa mãn $x^3 + y^3 - 6xy = p - 8$.

Câu 3. (1,0 điểm)

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca \leq 3$. Chứng minh rằng:

a. $a + b + c \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

b. $\frac{2ab+3}{(a+b)^2} + \frac{2bc+3}{(b+c)^2} + \frac{2ca+3}{(c+a)^2} \geq 6$.

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) sao cho hai tia BA và CD cắt nhau tại điểm E , hai tia AD và BC cắt nhau tại điểm F . Gọi G, H lần lượt là trung điểm của AC, BD . Đường phân giác của các góc \widehat{BEC} và \widehat{AFB} cắt nhau tại điểm K . Gọi L là hình chiếu vuông góc của K trên đường thẳng EF . Chứng minh rằng:

a. $\widehat{DEF} + \widehat{DFE} = \widehat{EBF}$ và $KL = \sqrt{LE \cdot LF}$.

b. $\widehat{GED} = \widehat{HEA}$ và $EG \cdot FH = EH \cdot FG$.

c. $\frac{MB}{MC} + \frac{NB}{NA} = 2 \cdot \frac{KH}{KG}$; trong đó M là giao điểm của hai đường thẳng EK và BC , N là giao điểm của hai đường thẳng FK và AB .

Câu 5. (1,0 điểm)

Thầy Hùng viết các số nguyên $1, 2, 3, \dots, 2021, 2022$ lên bảng. Thầy Hùng xóa đi 1010 số bất kì trên bảng. Chứng minh rằng trong các số còn lại trên bảng luôn tìm được:

a. 3 số có tổng các bình phương là hợp số.

b. 504 số có tổng các bình phương chia hết cho 4.

----- HẾT -----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm./.

LỜI GIẢI ĐỀ THI TS VÀO LỚP 10 CHUYÊN TOÁN TỈNH VĨNH PHÚC

Được thực hiện bởi Nguyễn Nhất Huy, Thầy Trịnh Văn Luân



Bài 1:

a) Giải phương trình $(x^2 - x + 1)(x^2 + 4x + 1) = -4x^2$.

b) Giải phương trình $\sqrt{x+3} + \sqrt{5-x} - 2\sqrt{15+2x-x^2} = -4$.

c) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy + 3x = 14y \\ (x^2 + 3x)(x + y - 3) = 18y \end{cases}$$

Hướng dẫn giải

a) $(x^2 - x + 1)(x^2 + 4x + 1) = -4x^2$.

• Với $x = 0$ thì $VT = 1; VP = 0$, nên $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình.

• Với $x \neq 0$ ta chia cả hai vế của phương trình cho x^2 , ta được

$$\left(x - 1 + \frac{1}{x}\right) \left(x + 4 + \frac{1}{x}\right) = -4.$$

Đặt $\left(x - 1 + \frac{1}{x}\right) = a$, phương trình trở thành $a(a + 5) = -4$

$$\Leftrightarrow a^2 + 5a + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = -4 \end{cases}.$$

- Với $a = -1 \Rightarrow x + \frac{1}{x} - 1 = -1 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 0$ (vô nghiệm).

- Với $a = -4 \Rightarrow x + \frac{1}{x} - 1 = -4 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}.$

b) $\sqrt{x+3} + \sqrt{5-x} - 2\sqrt{15+2x-x^2} = -4$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+3} + \sqrt{5-x} = 2\sqrt{15+2x-x^2} - 4. \quad (*)$$

Điều kiện $\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 5-x \geq 0 \\ \sqrt{15+2x-x^2} - 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 - 2\sqrt{3} \leq x \leq 1 + 2\sqrt{3}.$

$$(*) \Leftrightarrow x + 3 + 5 - x + 2\sqrt{15+2x-x^2} = 4 \left(15 + 2x - x^2 - 4\sqrt{15+2x-x^2} + 4\right)$$

$$\Leftrightarrow 4(15 + 2x - x^2) - 18\sqrt{15+2x-x^2} + 8 = 0.$$

Đặt $\sqrt{15+2x-x^2} = a \geq 2$, ta có phương trình

$$2a^2 - 9a + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - 4)(2a - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 4 \text{ (vì } a \geq 2)$$

$$\text{Khi đó, với } a = 4 \Rightarrow \sqrt{15 + 2x - x^2} = 4$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 2x + 15 = 16$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ (thoả mãn điều kiện)}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình $S = \{1\}$.

$$\text{c) } \begin{cases} x^2 + y^2 + xy + 3x = 14y & (1) \\ (x^2 + 3x)(x + y - 3) = 18y & (2) \end{cases}$$

- Với $y = 0$ phương trình (1) trở thành $x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$. Ta thấy $(0; 0), (-3; 0)$ thoả mãn phương trình (2), nên $(0; 0), (-3; 0)$ là hai nghiệm của phương trình.

- Với $y \neq 0$, chia cả hai vế của phương trình cho y ta được

$$\begin{cases} \frac{x^2 + 3x}{y} + (x + y) = 14 \\ \frac{x^2 + 3x}{y}(x + y - 3) = 18 \end{cases} \quad \text{Đặt } \begin{cases} \frac{x^2 + 3x}{y} = a \\ x + y - 3 = b \end{cases}$$

$$\text{Hệ phương trình trở thành } \begin{cases} a + b = 11 \\ ab = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 9 \Rightarrow a = 2 \\ b = 2 \Rightarrow a = 9 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} - \text{ Với } \begin{cases} a = 2 \\ b = 9 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2 + 3x}{y} = 2 \\ x + y - 3 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 5x - 24 = 0 \\ y = 12 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3; y = 9 \\ x = -8; y = 20 \end{cases} \\ - \text{ Với } \begin{cases} a = 9 \\ b = 2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2 + 3x}{y} = 9 \\ x + y - 3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 12x - 45 = 0 \\ y = 5 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3; y = 2 \\ x = -15; y = 20 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình có 6 nghiệm $(0; 0), (-3; 0), (3; 9), (-8; 20), (3; 2), (-15; 20)$.



Bài 2:

- Tìm tất cả các số nguyên tố p và q sao cho $p^2 + 3pq + 4q^2$ là một số chính phương.
- Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho tồn tại các số tự nhiên x, y thoả mãn

$$x^3 + y^3 - 6xy = p - 8.$$

Hướng dẫn giải

a) Giả sử (p, q) là cặp số nguyên tố sao cho tồn tại số nguyên dương r thỏa mãn

$$p^2 + 3pq + 4q^2 = r^2. \quad (1)$$

Trường hợp p, q đều khác 3, ta có $p^2 \equiv q^2 \equiv 1 \pmod{3}$ và vì thế nên

$$r^2 = p^2 + 3pq + 4q^2 \equiv p^2 + q^2 \equiv 2 \pmod{3}.$$

điều này mâu thuẫn nên một trong hai số p, q phải bằng 3. Ta xét hai trường hợp sau.

- Nếu $p = 3$ thế vào (1) ta được

$$(2q + 2)^2 = 4q^2 + 8q + 4 < r^2 = 4q^2 + 9q + 9 < 4q^2 + 12q + 9 = (2q + 3)^2.$$

Điều này vô lý nên trường hợp này không có giá trị thỏa mãn.

- Nếu $q = 3$ thế vào (1) ta được

$$(p + 4)^2 < r^2 = p^2 + 9p + 36 < (p + 6)^2.$$

Do đó $r^2 = (p + 5)^2$ tương đương với $p = 11$.

Vậy chỉ có duy nhất 1 cặp nguyên tố (p, q) thỏa mãn bài toán là $(11, 3)$.

b) Với các số x, y, p thỏa mãn giả thiết, ta có

$$x^3 + y^3 + 2^3 - 3x \cdot y \cdot 2 = p \Leftrightarrow (x + y + 2)(x^2 + y^2 + 4 - xy - 2x - 2y) = p.$$

Do x, y nguyên dương nên ta được $x + y + 2 \geq 2$ từ lập luận trên và như vậy

$$x + y + 2 = p, \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 + 4 - xy - 2x - 2y = 1. \quad (2)$$

Từ (1), ta có $y = p - x - 2$. Thế vào (2) rồi biến đổi tương đương, ta được

$$3x^2 + (6 - 3p)x + (p^2 - 6p + 11) = 0.$$

Coi phương trình trên là một phương trình bậc hai ẩn x . Ta cần có Δ_x là số chính phương. Ta tính được

$$\Delta_x = (6 - 3p)^2 - 4.3.(p^2 - 6p + 11) = -3p^2 + 36p - 96.$$

Ta dễ thu được $4 \leq p \leq 8$ từ $\Delta \geq 0$. Với yêu cầu chọn p là số nguyên tố ta được $p \in \{5, 7\}$

Thử với $p = 7$, ta tìm được $(x, y) = (2, 3)$ và $(x, y) = (3, 2)$.

Thử với $p = 5$, ta tìm được $(x, y) = (1, 2)$ và $(x, y) = (2, 1)$.

Vậy $p \in \{5, 7\}$ là các số nguyên tố thỏa mãn đề bài.



Bài 3:

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca \leq 3$. Chứng minh rằng

$$\text{a) } a + b + c \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{b) } \frac{2ab + 3}{(a + b)^2} + \frac{2bc + 3}{(b + c)^2} + \frac{2ca + 3}{(c + a)^2}.$$

Hướng dẫn giải

$$\text{a) Từ giả thiết, suy ra } 6 \geq 2(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca)$$

$$\geq \frac{(a + b + c)^2}{3} + (a + b + c)^2 = \frac{4}{3}(a + b + c)^2$$

$$\Rightarrow a + b + c \leq \sqrt{\frac{6 \cdot 3}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}. \text{ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } a = b = c = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{b) } \frac{2ab + 3}{(a + b)^2} + \frac{2bc + 3}{(b + c)^2} + \frac{2ca + 3}{(c + a)^2} \quad (1).$$

$$\text{Từ giả thiết ta thấy } \frac{2ab + 3}{(a + b)^2} \geq \frac{2ab + a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca}{(a + b)^2}$$

$$= \frac{(a + b)^2 + (b + c)(c + a)}{(a + b)^2}$$

$$= 1 + \frac{(b + c)(c + a)}{(a + b)^2}.$$

$$\text{Tương tự, VT (1)} \geq 3 + \frac{(b + c)(c + a)}{(a + b)^2} + \frac{(c + a)(a + b)}{(b + c)^2} + \frac{(a + b)(b + c)}{(c + a)^2}$$

$$\geq 3 + \sqrt[3]{\frac{(b + c)(c + a)}{(a + b)^2} \cdot \frac{(c + a)(a + b)}{(b + c)^2} \cdot \frac{(a + b)(b + c)}{(c + a)^2}} = 6 = VP \quad (1)$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } a = b = c = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



Bài 4:

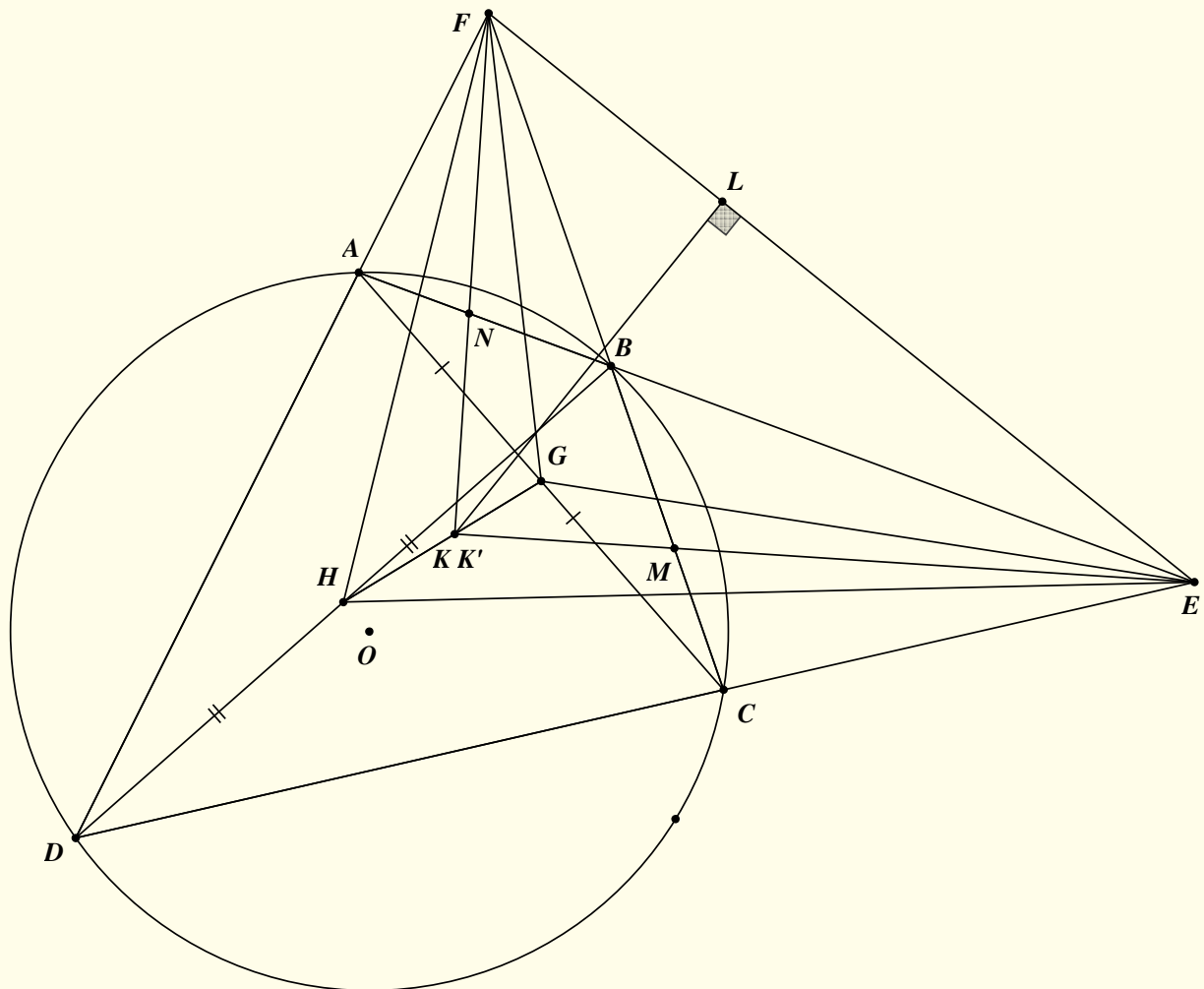
Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) sao cho hai tia BA và CD cắt nhau tại điểm E , hai tia AD và BC cắt nhau tại điểm F . Gọi G, H lần lượt là trung điểm của AC, BD . Đường phân giác của các góc \widehat{BEC} và \widehat{AFB} cắt nhau tại điểm K . Gọi L là hình chiếu vuông góc của K trên đường thẳng EF . Chứng minh rằng:

$$\text{a) } \widehat{DEF} + \widehat{DFE} = \widehat{EBF} \text{ và } KL = \sqrt{LE \cdot LF}.$$

$$\text{b) } \widehat{GED} = \widehat{HEA} \text{ và } EG \cdot FH = EH \cdot FG.$$

$$\text{c) } \frac{MB}{MC} + \frac{NB}{NA} = 2 \cdot \frac{KH}{KG}; \text{ trong đó } M \text{ là giao điểm của hai đường thẳng } EK \text{ và } BC, N \text{ là giao điểm của hai đường thẳng } FK \text{ và } AB.$$

Hướng dẫn giải



a) Vì $ABCD$ là tứ giác nội tiếp nên

$$\widehat{EBF} = \widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{ADC} = 180^\circ - \widehat{EDF} = \widehat{DEF} + \widehat{DFE}$$

Bằng các phép biến đổi góc ta có

$$\begin{aligned} \widehat{KFE} + \widehat{KEF} &= \frac{\widehat{AFB} + \widehat{BEC}}{2} + \widehat{BFE} + \widehat{BEF} \\ &= \frac{360^\circ - \widehat{FAB} - \widehat{BCE} - 2\widehat{ABF}}{2} + \widehat{ABF} \\ &= 90^\circ - \widehat{ABF} + \widehat{ABF} = 90^\circ \end{aligned}$$

Do đó $\triangle KEF$ là tam giác vuông tại K , có KL là đường cao nên theo hệ thức lượng ta được $KL^2 = LE \cdot LF$ suy ra $KL = \sqrt{LE \cdot LF}$. Vậy bài toán được chứng minh.

b) Ta có $\triangle EAC \sim \triangle EDB$ (g-g) vì có \widehat{BEC} chung, $\widehat{EAC} = \widehat{BAC} = \widehat{BDC} = \widehat{BDE}$.

Mà EG, EH là trung tuyến của $\triangle EAC, \triangle EBD$ nên $\triangle EAG \sim \triangle EDH$.

Suy ra $\widehat{GED} = \widehat{HEA}$ và $\frac{EG}{EH} = \frac{AG}{DH} = \frac{AC}{BD}$. Tương tự ta được $\frac{FG}{FH} = \frac{AC}{BD}$.

Do đó $\frac{FG}{FH} = \frac{EG}{EH}$ suy ra $EG \cdot FH = EH \cdot FG$. Vậy bài toán được chứng minh.

c) Theo b) ta được EK là phân giác \widehat{GEH} . Tương tự ta được FK là phân giác \widehat{GFH} . Gọi K' là giao của EK với GH . Theo tính chất đường phân giác ta có

$$\frac{K'G}{K'H} = \frac{EG}{EH} = \frac{FG}{FH}.$$

Suy ra FK' là phân giác \widehat{GFH} . Do đó K trùng K' . Nên H, K, G thẳng hàng.

Vì EK là phân giác nên theo tính chất đường phân giác kết hợp với phương tích, ta được

$$\frac{MB}{MC} = \frac{EB}{EC} = \frac{ED}{EA} = \frac{EH}{EG} = \frac{KH}{KG}.$$

Tương tự ta được $\frac{NB}{NA} = \frac{KH}{KG}$ suy ra $\frac{MB}{MC} + \frac{NB}{NA} = 2 \cdot \frac{KH}{KG}$.

Vậy bài toán được chứng minh.



Bài 5:

Thầy Hùng viết các số nguyên $1, 2, 3, \dots, 2021, 2022$ lên bảng. Thầy Hùng xoá đi 1010 số bất kì trên bảng. Chứng minh rằng trong các số còn lại trên bảng luôn tìm được

- 3 số có tổng các bình phương là hợp số.
- 504 số có tổng các bình phương chia hết cho 4.

Hướng dẫn giải

a) Trên bảng có tất cả 2022 số nguyên dương đầu tiên. Sau khi xoá đi 1010 số trên bảng, tồn tại ít nhất 1 số chẵn còn lại trên bảng luôn tạo với 2 số lẻ tổng các bình phương chẵn nên chúng là hợp số.

b) Các số chính phương lẻ luôn đồng dư 1 (mod 7) và các số chính phương chẵn luôn chia hết cho 4.

Suy ra tổng các bình phương của 504 số lẻ luôn chia hết cho 4 (504 chia hết cho 4).

Giả sử số các số chẵn trên bảng còn lại ít hơn số lẻ nên số số lẻ lớn hơn 506 số.

Khi đó tồn tại tổng các bình phương 504 số lẻ thỏa mãn hoặc nếu số các số chẵn trên bảng còn lại nhiều hơn số lẻ. Suy ra số số chẵn lớn hơn 506.

Vậy tổng các bình phương 504 số đó luôn chia hết cho 4.