SỞ GD & ĐT VĨNH PHÚC	KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM HỌC 2021 – 2022
ĐỀ CHÍNH THỨC	**ĐỀ THI MÔN: TOÁN**
	Dành cho thí sinh thi chuyên Toán và chuyên Tin
	Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1 (3,5 điểm).

a) Giải phương trình $4x^2 - x - 3 = 2\sqrt{x+2}$

b) Giải phương trình $x^2 + \dfrac{4x^2}{(x+2)^2} = 5$

c) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 \\ 2x^2 + y^2 - 3xy + 3x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$

Câu 2 (1,5 điểm).

a) Cho các số nguyên *x, y,z* thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$. Chứng minh rằng xyz chia hết cho 24

b) Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương $(a;b;c)$ sao cho $(a+b+c)^2 - 2a + 2b$ là số chính phương

Câu 3 (1,0 điểm). Cho các số dương $a;b;c$ thỏa mãn $\sqrt{a+b+ab+1} + c = 6$. Chứng minh rằng:

a) $a + b + 2c \geq 10$

b) $\dfrac{2a+1}{a+1} + \dfrac{2b+1}{b+1} + \dfrac{2c+2}{c+2} \leq 5$

Câu 4 (3,0 điểm). Cho hình thang *ABCD* (*AD* song song với *BC*, *AD* < *BC*). Các điểm *E, F* lần lượt thuộc các cạnh *AB*, *CD*. Đường tròn ngoại tiếp tam giác *AEF* cắt đường thẳng *AD* tại *M* (*M* không trùng với *A* và *D*, *D* nằm giữa *A* và *M*), đường tròn ngoại tiếp tam giác *CEF* cắt đường thẳng *BC* tại điểm *N* (*N* không trùng với *B* và *C*, *B* nằm giữa *C* và *N*). Đường thẳng *AB* cắt đường thẳng *CD* tại điểm *P*, đường thẳng *EN* cắt đường thẳng *FM* tại điểm *Q*. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác *EFQP* nội tiếp đường tròn

b) *PQ* song song với *BC* và tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác *PQE*, *AMF*, *CEN* cùng nằm trên một đường thẳng cố định.

c) Các đường thẳng *MN, BD, EF* đồng quy tại một điểm

Câu 5 (1,0 điểm). Thầy Quyết viết các số nguyên 1, 2, 3,…., 2021, 2002 lên bảng. Thầy Quyết thực hiện việc thay số như sau: Mỗi lần thay số, thầy chọn ra hai số bất kì trên bảng, xóa hai số này đi và viết lên bảng số trung bình cộng của hai số vừa xóa. Sau 2021 lần thay số như vậy, trên bảng còn lại duy nhất một số.

a) Chứng minh rằng số còn lại trên bảng có thể là số 2021

b) Chứng minh rằng số còn lại trên bảng có thể là số 2006

---HẾT---

ĐÁP ÁN

Câu 1 (3,5 điểm)

a) Giải phương trình $4x^2 - x - 3 = 2\sqrt{x+2}$ (ĐKXĐ: $x \ge -2$)

Bình phương hai vế của phương trình ta được:

$$\left(4x^2 - x - 3\right)^2 = 4\left(x+2\right)$$

$$\Leftrightarrow 16x^4 + x^2 + 9 - 8x^3 + 6x - 24x^2 = 4x + 8$$

$$\Leftrightarrow 16x^4 - 8x^3 - 23x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(16x^4 + 16x^3\right) - \left(24x^3 + 24x^2\right) + \left(x^2 + 2x + 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 16x^3\left(x+1\right) - 24x^2\left(x+1\right) + \left(x+1^2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+1\right)\left(16x^3 - 24x^2 + x + 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+1\right)\left[\left(16x^3 - 4x^2\right) - \left(20x^2 - 5x\right) - \left(4x-1\right)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+1\right)\left[4x^2\left(4x-1\right) - 5x\left(4x-1\right) - \left(4x-1\right)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+1\right)\left(4x-1\right)\left(4x^2 - 5x - 1\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ 4x-1=0 \\ 4x^2-5x-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\dfrac{1}{4} \\ 4x^2-5x-1=0 \quad (*) \end{array}\right.$$

Giải (*): $\Delta = \left(-5\right)^2 - 4.4.\left(-1\right) = 41$

Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt: $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5+\sqrt{41}}{8} \\ x=\dfrac{5-\sqrt{41}}{8} \end{array}\right.$

Thử lại vào phương trình đã cho ta được tập nghiệm của phương trình là: $S = \left\{-1; \dfrac{5+\sqrt{41}}{8}\right\}$

b) Giải phương trình: $x^2 + \dfrac{4x^2}{\left(x+2\right)^2} = 5$ (ĐKXĐ: $x \ne -2$)

$$\Leftrightarrow x^2 - \frac{4x^2}{x+2} + \frac{4x^2}{(x+2)^2} + \frac{4x^2}{x+2} - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{2x}{x+2}\right)^2+\frac{4x^2}{x+2}-5=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x+2}\right)^2+\frac{4x^2}{x+2}-5=0 \quad (1)$$

Đặt $t=\dfrac{x^2}{x+2}$, phương trình (1) trở thành: $t^2+4t-5=0 \quad (2)$

Vì $1+4+(-5)=0$ nên phương trình (2) có 2 nghiệm $t_1=1; t_2=-5$

Với $t_1=1$ ta có:

$$\frac{x^2}{x+2}=1 \Leftrightarrow x^2=x+2 \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \quad (3)$$

Vì $1-(-1)+(-2)=0$ nên phương trình (3) có 2 nghiệm $x_1=-1\ (tm);\ x_2=2\ (tm)$

Với $t_2=-5$ ta có:

$$\frac{x^2}{x+2}=-5 \Leftrightarrow x^2+5x+10=0 \text{ (Vô lí vì } x^2+5x+10=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{15}{4}>0 \quad \forall x\in R\text{)}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là: $S=\{-1;2\}$

c) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=8 & (1) \\ 2x^2+y^2-3xy+3x-2y+1=0 & (2) \end{cases}$

Ta có: $(2) \Leftrightarrow (2x^2-2xy)-(xy-y^2)+(x-y)+(2x-y)+1=0$

$\Leftrightarrow 2x(x-y)-y(x-y)+(x-y)+(2x-y)+1=0$

$\Leftrightarrow (x-y)(2x-y)+(x-y)+(2x-y+1)=0$

$\Leftrightarrow (x-y)(2x-y+1)+(2x-y+1)=0$

$\Leftrightarrow (2x-y+1)(x-y+1)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-y+1=0 \\ x-y+1=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2x+1 \\ y=x+1 \end{array}\right.$$

Thay $y=2x+1$ vào (1) ta được:

$$x^2+(2x+1)^2+x+2x+1=8 \Leftrightarrow 5x^2+7x-6=0 \quad (3)$$

$$\Delta=7^2-4.5.(-6)=169$$

Phương trình (3) có 2 nghiệm phân biệt $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-7+\sqrt{169}}{2.5} = \dfrac{3}{5} \\ x = \dfrac{-7-\sqrt{169}}{2.5} = -2 \end{array}\right.$

Với $x = \dfrac{3}{5} \Rightarrow y = 2.\dfrac{3}{5} + 1 = \dfrac{11}{5}$

Với $x = -2 \Rightarrow y = 2.(-2) + 1 = -3$

Thay $y = x + 1$ vào (1) ta được: $x^2 + (x+1)^2 + x + x + 1 = 8 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x - 6 = 0$ (4)

Vì $2 + 4 + (-6) = 0$ nên phương trình (4) có 2 nghiệm phân biệt: $x = 1; x = -3$

Với $x = 1 \Rightarrow y = 2$

Với $x = -3 \Rightarrow y = -2$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là: $(x;y) \in \left\{\left(\dfrac{3}{5};\dfrac{11}{5}\right);(-2;-3);(1;2);(-3;-2)\right\}$

Câu 2 (1,5 điểm)

a) Vì $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$ nên $2xyz$ chẵn, nên tồn tại ít nhất 1 số chẵn, giả sử là *x* chẵn.

Khi đó: $x^2 \vdots 4$; $2xyz \vdots 4 \Rightarrow y^2 + z^2 \vdots 4$ (*)

Nếu *y* lẻ $\Rightarrow$ y^2 lẻ $\Rightarrow$ lẻ $z^2 \Rightarrow$ z lẻ

$\Rightarrow \begin{cases} y = 2k+1 \Rightarrow y^2 = 4k^2 + 4k + 1 \\ z = 2m+1 \Rightarrow z^2 = 4m^2 + 4m + 1 \end{cases} \quad (k;m \in Z)$

$\Rightarrow y^2 + z^2 = 4k^2 + 4k + 4m^2 + 4m + 2$

$\Rightarrow y^2 + z^2$ chia 4 dư 2 (không thỏa mãn(*))

Do đó *y* chẵn và *z* chẵn $\Rightarrow y \vdots 2$; $z \vdots 2$

$\Rightarrow xyz \vdots 8$ (1)

Giả sử cả 3 số *x, y, z* đều không chia hết cho 3 vì *x; y; z* chẵn nên $x^2; y^2; z^2 \equiv 1 (mod\,3)$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \vdots 3$

Do đó $2xyz \vdots 3 \Rightarrow xyz \vdots 3$ (mâu thuẫn với giả thiết *x, y, z* đều không chia hết cho 3)

Nên tồn tại 1 số chia hết cho 3 hay $xyz \vdots 3$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $xyz \vdots 24$

Vậy $xyz \vdots 24$

b) Đặt $A=\left(a+b+c\right)^2-2a+2b$

Ta có:

$\left(a+b+c+1\right)^2=\left(a+b+c\right)^2+2\left(a+b+c\right)+1>A$

$\left(a+b+c-1\right)^2=\left(a+b+c\right)^2-2\left(a+b+c\right)+1<A$

Nên $\left(a+b+c-1\right)^2<A<\left(a+b+c+1\right)^2$

Mà *A* chính phương nên $A=\left(a+b+c\right)^2$

$\Rightarrow\left(a+b+c\right)^2-2a+2b=\left(a+b+c\right)^2$

$\Leftrightarrow 2a=2b\Leftrightarrow a=b$

Vậy tất cả các bộ (*a; b; c*) cần tìm là (*k; k; m*) với *k, m* nguyên dương bất kì

Câu 3 (1,0 điểm)

a)

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM:

$\left(a+1\right)+\left(b+1\right)\geq 2\sqrt{\left(a+1\right)\left(b+1\right)}\Rightarrow\sqrt{ab+a+b+1}\leq\dfrac{a+b+2}{2}$

$\Rightarrow 6=\sqrt{ab+a+b+1}+c\leq\dfrac{a+b+2}{2}+c$

$\Rightarrow a+b+2+2c\geq 12$

Suy ra $a+b+2c\geq 10$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{a+1}=\sqrt{b+1}\Leftrightarrow a=b$

Vậy $a+b+2c\geq 10$

b) Ta có:

$\dfrac{2a+1}{a+1}+\dfrac{2b+1}{b+1}+\dfrac{2c+2}{c+2}\leq 5$

$\Leftrightarrow\dfrac{2a+1}{a+1}-2+\dfrac{2b+1}{b+1}-2+\dfrac{2c+2}{c+2}-2\geq -1$

$\Leftrightarrow\dfrac{-1}{a+1}+\dfrac{-1}{b+1}+\dfrac{-2}{c+2}\geq -1$

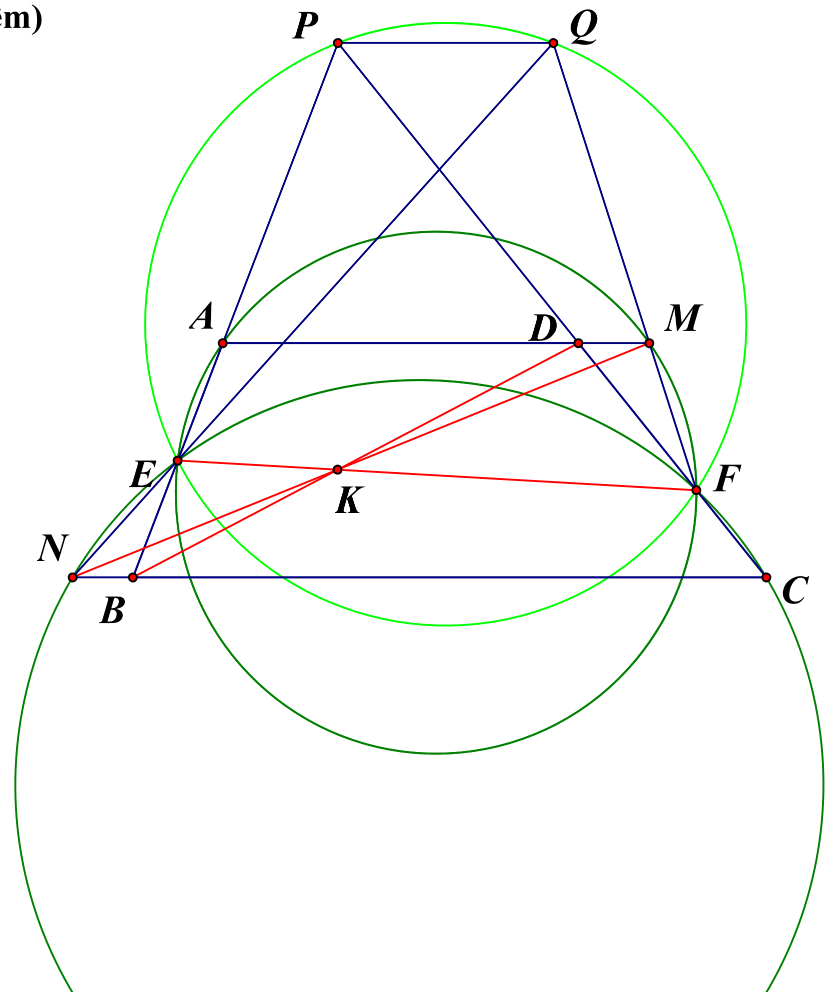
$\Leftrightarrow\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}+\dfrac{2}{c+2}\leq 1$

Ta có: $\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}+\dfrac{2}{c+2}\geq\dfrac{2}{\sqrt{(a+1)(b+1)}}+\dfrac{2}{c+2}\geq\dfrac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt{(a+1)(b+1)}+c+2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{2}{c+2} \ge \frac{8}{\frac{a+b+2}{2}+c+2}=\frac{16}{a+b+2c+6} \ge \frac{16}{10+6}=1 \text{ (đpcm)}$$

Vậy $\frac{2a+1}{a+1}+\frac{2b+1}{b+1}+\frac{2c+2}{c+2} \le 5$

Câu 4 (3,0 điểm)



a) Ta có:

$\widehat{EQF}=\widehat{NEF}-\widehat{QFE}=\left(180^o-\widehat{FCN}\right)-\widehat{PAD}$

Vì $AD // BC$ nên $\widehat{FCN}=\widehat{PDA}$ (2 góc đồng vị)

Do đó: $\widehat{EQF}=180^o-\widehat{PDA}-\widehat{PAD}=\widehat{EPF}$

Suy ra tứ giác EFQP nội tiếp đường tròn.

b) Vì tứ giác EFQP nội tiếp nên $\widehat{QPA} = 180^o - \widehat{QFE} = 180^o - \widehat{PAD}$

$\Rightarrow \widehat{QPA} + \widehat{PAD} = 180^o$

Mà hai góc ở vị trí trong cùng phía $\Rightarrow$ $PQ // AD$

Gọi $(O_1);(O_2);(O_3)$ lần lượt là các đường tròn ngoại tiếp tam giác PQE; AMF, CEN

Do (O_1) cắt (O_2) tại E và F nên $O_1O_2 \perp EF$ (1)

Do (O_2) cắt (O_3) tại E và F nên $O_2O_3 \perp EF$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $O_1;O_2;O_3$ thẳng hàng (đpcm)

c) Giả sử MN cắt EF tại K. Ta chứng minh B, D, K thẳn hàng

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác MNQ và cát tuyến KEF ta được:

$$\frac{KM}{KN}.\frac{EN}{EQ}.\frac{FQ}{FM} = 1$$

Suy ra $\frac{KM}{KN} = \frac{EQ}{EN}.\frac{FM}{FQ} = \frac{PQ}{NB}.\frac{DM}{PQ} = \frac{DM}{NB}$

Kết hợp với *MD // NB*, suy ra *B, D, K* thẳng hàng (đpcm)

Câu 5 (1,0 điểm)

a) Ta sẽ chỉ ra một cách xóa để số còn lại trên bảng là 2021

Lần 1: Xóa 1; 3 và thay bởi số 2

Lần 2: Xóa 2; 2 và thay bởi số 2

Lần 3: Xóa 2; 4 và thay bởi số 3

…..

Lần *k*: Xóa $k-1$; $k+1$ và thay bởi số *k*.

…..

Lần 2020: Xóa 2019; 2021 và thay bởi số 2020

Lần 2021: Xóa 2021; 2022 và thay bởi số 2021.

Lúc này trên bảng chỉ còn lại số 2021.

b) Ta cũng chỉ ra được một cách xóa để số còn lại trên bảng là 2006.

Chỉ cần chia dãy các số 1; 2; 3; 4; …, 2020; 2021; 2022 thành hai phần (hai dãy con) như sau:

Dãy 1: 1; 2; 3; 4; …., 2005; 2006

Dãy 2: 2007; 2008; ….; 2021; 2022.

Bằng thuật toán như phần a với dãy 1 thì sau 2004 bước ta còn lại 2 số 2004, 2006

Bằng thuật toán như phần a với dãy 2 nhưng thực hiện ngược lại từ cuối dãy về đầu dãy thì sau 15 bước ta còn lại 1 số 2008.

Nên sau 2019 bước sẽ còn lại 3 số: 2004; 2006; 2008.
Và sau 2 bước nữa ta thu được số 2006 trên bảng.
Vậy số còn lại trên bảng có thể là số 2006

Nhận xét: *Bằng quy nạp theo n, ta có thể chứng minh được bài toán tổng quát sau: Cho các số trên bảng là 1; 2; 3; 4;...;* $n-1$ *; n. Khi đó ta luôn có thể có cách thực hiện việc thay số để thu được một số k bất kì từ 2 đến* $n-1$