UBND TỈNH BẮC NINH
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ CHÍNH THỨC

KÌ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2022 - 2023

Môn thi: Toán chuyên
Thời gian làm bài: 150 phút
——— *(không kể thời gian phát đề)* ———-

——- Hướng dẫn thực hiện bởi DUC PV ———-

PHẦN ĐỀ BÀI

Bài số 1. *(1,5 điểm)*

1) Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(2;-3)$ và $B(7;7)$. Tìm điểm M thuộc trục Ox để ba điểm M, A, B thẳng hàng.

2) Cho a là nghiệm của phương trình $6x^2+\sqrt{3}x-\sqrt{3}=0$. Tính giá trị của biểu thức

$$T=12a^4-a^2+2a$$

Bài số 2. *(2,0 điểm)*

1) Giải phương trình $\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-2}\right)\left(1+\sqrt{x^2+3x-10}\right)=7$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y+z=6 \\ xy+yz+zx=11 \\ xyz=6 \end{cases}$.

Bài số 3. *(2,0 điểm)*

1) Tìm tất cả các nghiệm $(x;y;z)$ của phương trình $x(x^2+x+1)=z^y-1$ thỏa mãn x, y là các số nguyên và z là số nguyên tố.

2) Tìm các số thực x sao cho $x+\sqrt{2022}$ và $\dfrac{3}{x}-\sqrt{2022}$ đều là số nguyên.

Bài số 4. *(3,0 điểm)*

1) Cho đường tròn (O) có đường kính AB. Lấy điểm C thuộc đoạn AO (C khác A, O). Vẽ đường tròn (I) đường kính BC. Vẽ tiếp tuyến AD và cát tuyến AEF với đường tròn (I) (E nằm giữa A và F) sao cho tia AO nằm giữa hai tia AD và AE. Đường thẳng vuông góc với AB vẽ từ C cắt đường tròn (O) tại hai điểm, gọi một trong hai giao điểm đó là N sao cho N và D thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ AB. Gọi S là giao điểm của hai đường thẳng DI và NB. Gọi R là giao điểm của hai đường thẳng DN và AS. Gọi J là trung điểm của SD.

   a) Chứng minh $\triangle AND$ là tam giác cân.

   b) Gọi L, T lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle SBC$ và $\triangle SEF$. Chứng minh rằng ba điểm J, L, T thẳng hàng.

2) Cho hình vuông $ABCD$ có diện tích S. Tứ giác $MNPQ$ có bốn đỉnh M, N, P, Q lần lượt thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA của hình vuông đã cho và không trùng với đỉnh của hình vuông. Chứng minh rằng $S \le AC \cdot \dfrac{MN+NP+PQ+QM}{4}$.

Bài số 5. *(1,5 điểm)*

1) Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x^3 + y^3 + z^3 = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^3}{3y+1} + \frac{y^3}{3z+1} + \frac{z^3}{3x+1}$$

2) Có 10 bạn học sinh tham gia thi đấu bóng bàn. Hai bạn bất kì đều phải đấu với nhau một trận, bạn nào cũng phải gặp đủ 9 đấu thủ của mình và không có trận đấu hòa. Chứng minh rằng có thể sắp xếp 10 bạn này thành một hàng dọc sao cho bạn đứng trước thắng bạn đứng kề sau.

——— HẾT ———

HƯỚNG DẪN

Bài số 1

1) Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(2; -3)$ và $B(7; 7)$. Tìm điểm M thuộc trục Ox để ba điểm M, A, B thẳng hàng.

2) Cho a là nghiệm của phương trình $6x^2 + \sqrt{3}x - \sqrt{3} = 0$. Tính giá trị của biểu thức

$$T = 12a^4 - a^2 + 2a$$

1)
Gọi $(d) : y = ax + b$ là đường thẳng đi qua hai điểm A và B. Khi đó

$$\begin{cases} -3 = 2a + b \\ 7 = 7a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -7 \end{cases} \Rightarrow (d) : y = 2x - 7$$

Ba điểm M, A, B thẳng hàng $\Leftrightarrow M \in (d)$. Mà $M \in Ox$ nên $M(k; 0)$ và

$$0 = 2k - 7 \Leftrightarrow k = \frac{7}{2}$$

Vậy điểm cần tìm là $M\left(\frac{7}{2}; 0\right)$.
2)
Vì a là nghiệm của phương trình $6x^2 + \sqrt{3}x - \sqrt{3} = 0$ nên

$$\begin{aligned} & 6a^2 + \sqrt{3}a - \sqrt{3} = 0 \\ \Rightarrow\ & \left(6a^2\right)^2 = (\sqrt{3} - \sqrt{3}a)^2 \\ \Leftrightarrow\ & 36a^4 = 3a^2 - 6a + 3 \\ \Leftrightarrow\ & 12a^4 = a^2 - 2a + 1 \\ \Leftrightarrow\ & 12a^4 - a^2 + 2a = 1 \end{aligned}$$

Vậy $T = 1$.

Bài số 2

1) Giải phương trình $\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-2}\right)\left(1+\sqrt{x^2+3x-10}\right)=7$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y+z=6 \\ xy+yz+zx=11 \\ xyz=6 \end{cases}$.

1)
Xét phương trình $\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-2}\right)\left(1+\sqrt{x^2+3x-10}\right)=7 \quad (1)$. Điều kiện $x \geq 2$.
Phương trình (1) có thể viết lại thành

$$\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-2}\right)\left(1+\sqrt{x+5}.\sqrt{x-2}\right)=7$$

Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{x+5} \\ b=\sqrt{x-2} \end{cases}$ $(a>b\geq 0)$ thì $a^2-b^2=7$ và phương trình trên trở thành

$$\begin{aligned} &(a-b)(1+ab)=a^2-b^2 \\ \Leftrightarrow\ &(a-b)(1+ab-a-b)=0 \\ \Leftrightarrow\ &(a-b)(1-a)(1-b)=0 \\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} 1-a=0 \\ 1-b=0 \end{array}\right. \text{(vì } a>b) \end{aligned}$$

- Với $1-a=0 \Leftrightarrow a=1$, ta có $\sqrt{x+5}=1 \Leftrightarrow x=-4$ (không thỏa mãn đk).
- Với $1-b=0 \Leftrightarrow b=1$, ta có $\sqrt{x-2}=1 \Leftrightarrow x=3$ (thỏa mãn).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x=3$.
2)
Xét hệ phương trình $\begin{cases} x+y+z=6 & (i) \\ xy+yz+zx=11 & (ii) \\ xyz=6 & (iii) \end{cases}$.

Từ (i) suy ra $x+y=6-z$ và từ (iii) suy ra $xy=\dfrac{6}{z}$. Thay vào (ii) ta được

$$\begin{aligned} \frac{6}{z}+z(6-z)=11 &\Leftrightarrow z^3-6z^2+11z-6=0 \\ &\Leftrightarrow (z-1)(z-2)(z-3)=0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=1 \\ z=2 \\ z=3 \end{array}\right. \end{aligned}$$

- Với $z=1$, ta có $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$, suy ra x,y là hai nghiệm của phương trình

$$t^2-5t+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=3 \end{array}\right.$$

  Như vậy $(a,b)=(2,3)$ hoặc $(a,b)=(3,2)$.

- Với $z=2$, ta có $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=3 \end{cases}$, suy ra x,y là hai nghiệm của phương trình

$$t^2-4t+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=3 \end{array}\right.$$

Như vậy $(a,b) = (1,3)$ hoặc $(a,b) = (3,1)$.

- Với $z = 3$, ta có $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$, suy ra x, y là hai nghiệm của phương trình

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 2 \end{array} \right.$$

Như vậy $(a,b) = (1,2)$ hoặc $(a,b) = (2,1)$.

Vậy hệ phương trình đã cho có các nghiệm (x,y,z) là tất cả các hoán vị của $(1,2,3)$.

Bài số 3

1) Tìm tất cả các nghiệm $(x;y;z)$ của phương trình $x(x^2 + x + 1) = z^y - 1$ thỏa mãn x, y là các số nguyên và z là số nguyên tố.

2) Tìm các số thực x sao cho $x + \sqrt{2022}$ và $\dfrac{3}{x} - \sqrt{2022}$ đều là số nguyên.

1)
Biến đổi giả thiết thành $(x^2 + 1)(x + 1) = z^y \quad (*)$.
Do x, y, z đều nguyên nên từ $(*)$ suy ra $x, y \geq 0$. Đồng thời vì z là số nguyên tố nên

$$\begin{cases} x^2 + 1 = z^a \\ x + 1 = z^b \end{cases} \quad (a, b \in \mathbb{Z}; a \geq b \geq 0)$$

Khi đó ta có $x^2 + 1 \,\vdots\, x + 1$ hay $(x+1)(x-1) + 2 \,\vdots\, x + 1$, dẫn tới

$$2 \,\vdots\, x + 1 \Rightarrow x \in \{0; 1\} \quad (\text{do } x \geq 0)$$

- Với $x = 0$, thay vào $(*)$ ta có $z^y = 1 \Rightarrow y = 0$ và z là số nguyên tố bất kì.
- Với $x = 1$, thay vào $(*)$ ta có $z^y = 4 \Rightarrow y = z = 2$.

Vậy $(x;y;z) = (1;2;2)$ hoặc $(x;y;z) = (0;0;k)$ với k là số nguyên tố bất kì.
2)
Giả sử $x + \sqrt{2022} = a$ $(a \in \mathbb{Z})$. Khi đó $x = a - \sqrt{2022}$ và

$$\begin{aligned} \frac{3}{x} - \sqrt{2022} &= \frac{3}{a - \sqrt{2022}} - \sqrt{2022} \\ &= \frac{3(a + \sqrt{2022})}{a^2 - 2022} - \sqrt{2022} \\ &= \frac{3a}{a^2 - 2022} + \left(\frac{3}{a^2 - 2022} - 1 \right) \cdot \sqrt{2022} \end{aligned}$$

Vì $\dfrac{3}{x} - \sqrt{2022} \in \mathbb{Z}$ và $a \in \mathbb{Z}$ nên

$$\begin{cases} \dfrac{3a}{a^2 - 2022} \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{3}{a^2 - 2022} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = \pm 45$$

Từ đó ta có $x = 45 - \sqrt{2022}$ hoặc $x = -45 - \sqrt{2022}$.

Bài số 4

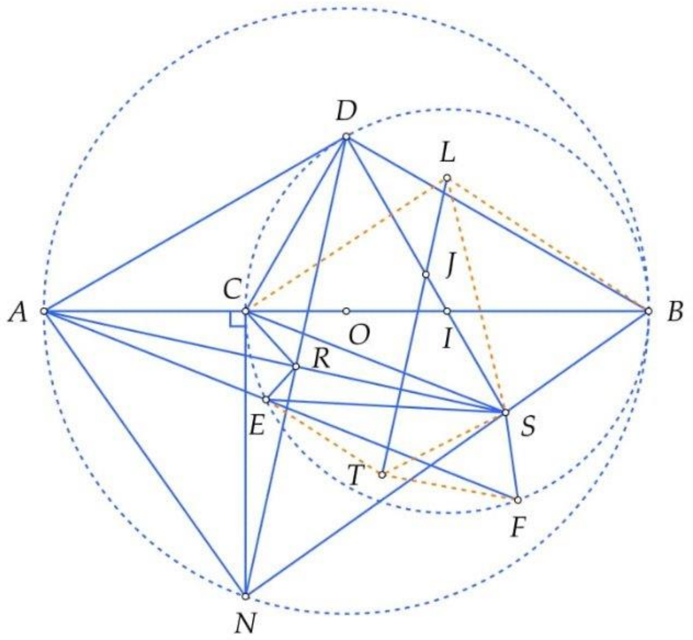
1) Cho đường tròn (O) có đường kính AB. Lấy điểm C thuộc đoạn AO (C khác A, O). Vẽ đường tròn (I) đường kính BC. Vẽ tiếp tuyến AD và cát tuyến AEF với đường tròn (I) (E nằm giữa A và F) sao cho tia AO nằm giữa hai tia AD và AE. Đường thẳng vuông góc với AB vẽ từ C cắt đường tròn (O) tại hai điểm, gọi một trong hai giao điểm đó là N sao cho N và D thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ AB. Gọi S là giao điểm của hai đường thẳng DI và NB. Gọi R là giao điểm của hai đường thẳng DN và AS. Gọi J là trung điểm của SD.

   a) Chứng minh $\triangle AND$ là tam giác cân.

   b) Gọi L, T lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle SBC$ và $\triangle SEF$. Chứng minh rằng ba điểm J, L, T thẳng hàng.

2) Cho hình vuông $ABCD$ có diện tích S. Tứ giác $MNPQ$ có bốn đỉnh M, N, P, Q lần lượt thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA của hình vuông đã cho và không trùng với đỉnh của hình vuông. Chứng minh rằng $S \leq AC \cdot \dfrac{MN + NP + PQ + QM}{4}$.

1)



a)
Dễ thấy $\triangle ADC \backsim \triangle ABD (g.g)$ nên

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AD} \Rightarrow AD^2 = AB.AC \quad (1)$$

Xét $\triangle ANB$ vuông tại N có NC là đường cao nên

$$AN^2 = AB.AC \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $AD^2 = AN^2$ hay $AD = AN$, do đó $\triangle AND$ cân tại A.
b)
Ta có $\widehat{ADS} = \widehat{ANS} = 90^\circ$ và $\widehat{ADN} = \widehat{AND}$ nên

$$\widehat{ADS} - \widehat{ADN} = \widehat{ANS} - \widehat{AND}$$

$$\text{hay} \quad \widehat{SDN} = \widehat{SND}$$

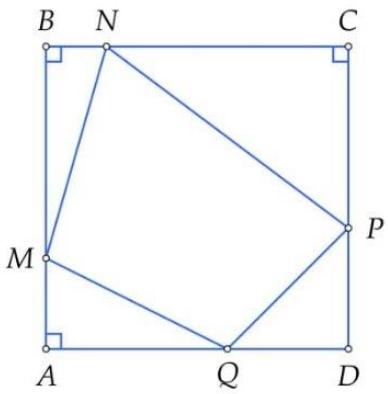
Suy ra $\triangle SDN$ cân tại S hay $SD = SN$. Kết hợp với $AD = AN$ (cmt) suy ra AS là đường trung trực của DN. Từ đây, xét $\triangle ADS$ vuông tại D có DR là đường cao nên

$$AD^2 = AR.AS$$

Mặt khác, dễ dàng chứng minh được $AD^2 = AC.AB = AE.AF$ nên

$$AR.AS = AC.AB = AE.AF$$

Suy ra các tứ giác $BCRS$ và $EFSR$ nội tiếp. Điều này chứng tỏ các đường tròn tâm L ngoại tiếp $\triangle SBC$ và tâm T ngoại tiếp $\triangle SEF$ cắt nhau tại hai điểm R và S. Do vậy, IJ là đường trung trực của RS.
Mặt khác, $\triangle DRS$ vuông tại R có RJ là đường trung tuyến nên $JR = JS \Rightarrow J$ thuộc đường trung trực của RS. Kết hợp với kết quả trên suy ra ba điểm L, T, J thẳng hàng.
2)



Gọi độ dài cạnh hình vuông $ABCD$ là x. Khi đó $AC = x\sqrt{2}$ và $S = x^2$. Do đó, điều phải chứng minh tương đương với

$$x^2 \leq x\sqrt{2} \cdot \frac{MN + NP + PQ + QM}{4}$$
$$\text{hay } MN + NP + PQ + QM \geq 2\sqrt{2}x \quad (*)$$

Theo Pytago, ta có

$$MN^2 = BM^2 + BN^2 \geq \frac{(BM + BN)^2}{2} \Rightarrow MN \geq \sqrt{2}(BM + BN)$$

Tương tự, ta chứng minh được

$$NP \geq \sqrt{2}(CN + CP)$$
$$PQ \geq \sqrt{2}(DP + DQ)$$
$$QM \geq \sqrt{2}(AQ + AM)$$

Từ đó suy ra

$$MN + NP + PQ + QM \geq \sqrt{2}(BM + BN + CN + CP + DP + DQ + AQ + AM) = 2\sqrt{2}x$$

Như vậy, $(*)$ đúng và ta có điều phải chứng minh.

Bài số 5

1) Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x^3 + y^3 + z^3 = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^3}{3y+1} + \frac{y^3}{3z+1} + \frac{z^3}{3x+1}$$

2) Có 10 bạn học sinh tham gia thi đấu bóng bàn. Hai bạn bất kì đều phải đấu với nhau một trận, bạn nào cũng phải gặp đủ 9 đấu thủ của mình và không có trận đấu hòa. Chứng minh rằng có thể sắp xếp 10 bạn này thành một hàng dọc sao cho bạn đứng trước thắng bạn đứng kề sau.

1)
Theo AM-GM, ta có

$$\begin{aligned} x^3+1+1 &\geq 3\sqrt[3]{x^3.1.1} = 3x \Rightarrow 3x+1 \leq x^3+3 \\ y^3+1+1 &\geq 3\sqrt[3]{y^3.1.1} = 3y \Rightarrow 3y+1 \leq y^3+3 \\ z^3+1+1 &\geq 3\sqrt[3]{z^3.1.1} = 3z \Rightarrow 3z+1 \leq z^3+3 \end{aligned}$$

Do đó

$$P \geq \frac{x^3}{y^3+3} + \frac{y^3}{z^3+3} + \frac{z^3}{x^3+3}$$

Đặt $\begin{cases} a = x^3 \\ b = y^3 \\ c = z^3 \end{cases}$ thì $a, b, c \geq 0$ và $a+b+c = 3$, đồng thời

$$\begin{aligned} P &\geq \frac{a}{b+3} + \frac{b}{c+3} + \frac{c}{a+3} \\ &= \frac{a^2}{ab+3a} + \frac{b^2}{bc+3b} + \frac{c^2}{ca+3c} \\ &\geq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca+3(a+b+c)} \quad (Cauchy-Schwarz) \\ &= \frac{9}{ab+bc+ca+9} \end{aligned}$$

Mặt khác, ta có bất đẳng thức quen thuộc $ab+bc+ca \leq \dfrac{(a+b+c)^2}{3} = 3$ nên

$$P \geq \frac{9}{3+9} = \frac{3}{4}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$ hay $x = y = z = 1$.
Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{3}{4}$, đạt được tại $x = y = z = 1$.
Chú ý. Có thể làm theo hướng khác như sau
Theo Cauchy-Schwarz, ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{x^6}{3x^3y+x^3} + \frac{y^6}{3y^3z+y^3} + \frac{z^6}{3z^3x+z^3} \\ &\geq \frac{(x^3+y^3+z^3)^2}{3(x^3y+y^3z+z^3x)+(x^3+y^3+z^3)} \end{aligned}$$

$$= \frac{9}{3(x^3y + y^3z + z^3x) + 3}$$
$$= \frac{3}{x^3y + y^3z + z^3x}$$

Bây giờ, ta chứng minh $T = x^3y + y^3z + z^3x \le 4$.
Thật vậy, theo AM-GM ta có

$$y^3 + 1 + 1 \ge 3\sqrt[3]{y^3.1.1} = 3y \Rightarrow y \le \frac{y^3+2}{3} \Rightarrow\ x^3y \le x^3 \cdot \frac{y^3+2}{3}$$

Tương tự và suy ra

$$T \le \frac{x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3 + 3(x^3 + y^3 + z^3)}{3}$$

Mặt khác, $x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3 \le \dfrac{(x^3 + y^3 + z^3)^2}{3} = 3$, do đó

$$T \le \frac{3 + 3.3}{3} = 4$$

Từ đó ta có $P \ge \dfrac{3}{T} \ge \dfrac{3}{4}$.
2)
Vì không có trận đấu hòa nên ta luôn xếp được 10 bạn thành một hàng dọc sao cho tồn tại k bạn liên tiếp mà bạn đứng trước thắng bạn kề sau. Rõ ràng $k \ge 2$ và do số cách xếp là hữu hạn nên tồn tại giá trị lớn nhất của k, giả sử là k_0 và ta gọi (k_0) là dãy gồm k_0 bạn trong hàng thỏa mãn yêu cầu bài toán. Ta sẽ chứng minh $k_0 = 10$. Giả sử ngược lại, $k_0 < 10$. Khi đó, tồn tại bạn A không thuộc dãy (k_0). Có các khả năng sau xảy ra

- A thắng bạn đứng đầu của dãy (k_0) thì có thể xếp A lên đầu dãy (k_0) và ta có dãy gồm $k_0 + 1$ bạn thỏa mãn yêu cầu bài toán. Điều này mâu thuẫn với giả thiết về k_0.
- A thua bạn đứng cuối của dãy (k_0) thì có thể xếp A vào cuối dãy (k_0) và ta có dãy gồm $k_0 + 1$ bạn thỏa mãn yêu cầu bài toán. Điều này mâu thuẫn với giả thiết về k_0.
- A thắng một số bạn, đồng thời cũng thua một số bạn trong dãy (k_0). Khi đó, tồn tại hai bạn B, C của dãy (k_0) mà B đứng trên C và trong hai bạn B và C có một bạn thắng và một bạn thua A.
  - Nếu A thua B và A thắng C thì xếp A vào giữa B và C ta thu được dãy gồm $k_0 + 1$ bạn thỏa mãn yêu cầu bài toán. Điều này mâu thuẫn với giả thiết về k_0.
  - Nếu A thắng B nhưng thua C. Lần lượt xét các bạn đứng phía trên B sẽ xuất hiện 2 khả năng
    + Tồn tại hai bạn liên tiếp phía trên B (có thể gồm B) mà bạn ở trên thắng A đồng thời bạn kề dưới thua A. Đến đây, ta lại có thể xếp A vào giữa hai bạn này và dẫn tới mâu thuẫn với giả thiết về k_0.
    + A thắng tất cả các bạn ở phía trên B. Khi đó, ta lại có thể xếp A lên đầu hàng và cũng dẫn tới mâu thuẫn với giả thiết về k_0.

Tóm lại, giả sử là sai và bài toán được chứng minh.