SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THANH HÓA -------------------	ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN LAM SƠN NĂM HỌC 2020 – 2021 Môn: TOÁN (chuyên) Ngày thi: 17/07/2020 *Thời gian làm bài:150 phút (không kể thời gian phát đề)*

Câu 1. (2,0 điểm)

a) Cho a, b, c là ba số thực thỏa mãn đồng thời các điều kiện $a+b+c=1$ và $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1.$

Chứng minh rằng trong ba số a, b, c có ít nhất một số bằng 1.

b) Cho x, y, z là ba số thực thỏa mãn đồng thời các điều kiện $x+y+z=2045$ và

$$(x-18)^3+(y-7)^3+(z-2020)^3=0.$$

Tính giá trị của biểu thức: $F=(x-18)^{2021}+(y-7)^{2021}+(z-2020)^{2021}$.

Câu 2. (2,0 điểm)

a) Giải phương trình: $1+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{35}{12x}.$

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy-3y=4x^2+3x+3 \\ y^2+4y+18=7x^2+16x \end{cases}.$

Câu 3. (2,0 điểm)

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $xy^2-(x-2)(x^4+2x+1)=2y^2.$

b) Chứng minh rằng nếu $2^n=10a+b$ với a, b, n là các số tự nhiên thỏa mãn $0<b<10$ và $n>3$ thì ab chia hết cho 6.

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn có $\widehat{BAC}>45^0$. Về phía ngoài tam giác ABC dựng các hình vuông $ABMN$ và $ACPQ$. Đường thẳng AQ cắt đoạn thẳng BM tại E, đường thẳng AN cắt đoạn thẳng CP tại F.

a) Chứng minh tứ giác $EFQN$ nội tiếp được một đường tròn.

b) Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng EF. Chứng minh I là tâm đường trong ngoại tiếp tam giác ABC.

c) Đường thẳng MN cắt đường thẳng PQ tại D. Các đường tròn ngoại tiếp tam giác DMQ và DNP cắt nhau tại K với $K \neq D$. Các tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại B và C cắt nhau tại J. Chứng minh bốn điểm D, A, K, J thẳng hàng.

Câu 5. (1,0 điểm)

Trên một đường tròn người ta lấy 2024 điểm phân biệt, các điểm được tô màu xanh và màu đỏ xen kẽ nhau. Tại mỗi điểm ta ghi một số thực khác 0 và 1 sao cho quy tắc sau được thỏa mãn *"số ghi tại điểm màu xanh bằng tổng của hai số ghi màu đỏ kể nó; số ghi màu đỏ bằng tích của hai số ghi tại hai điểm màu xanh kế nó"*. Tính tổng của 2024 số đó.

---**HẾT**---

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THANH HÓA

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN LAM SƠN
NĂM HỌC 2020 – 2021
Môn: TOÁN (chuyên)
Ngày thi: 17/07/2020
Thời gian làm bài:150 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu 1.

a) Ta có: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1\Leftrightarrow ab+bc+ca=abc.$

Khi đó $(1-a)(1-b)(1-c)=1-(a+b+c)+(ab+bc+ca)-abc=0.$

Suy ra: $(1-a)(1-b)(1-c)=0.$

Đẳng thức này chứng tỏ một trong ba số $a,\ b,\ c$ có ít nhất một số bằng 1.

b) Đặt $a=x-18,\ b=y-7$ và $c=z-2020.$ Khi đó ta có: $\begin{cases} a+b+c=0 \\ a^3+b^3+c^3=0 \end{cases}.$

Do đó: $F=a^{2021}+b^{2021}+c^{2021}.$

Ta có: $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)=0.$

Suy ra $3abc=a^3+b^3+c^3=0.$ Không mất tính tổng quát giả sử $a=0.$

Khi đó ta có: $b^3=-c^3\Leftrightarrow b=-c.$

Suy ra $F=a^{2021}+b^{2021}+c^{2021}=0+(-c)^{2021}+c^{2021}=0.$

Vậy $F=0.$

Câu 2.

a) Điều kiện xác định: $|x|>1.$ Ta có: $\frac{35}{12x}=1+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}>0\Rightarrow x>0.$ Do đó $x>1.$

Bình phương hai vế của phương trình đã cho, ta được:

$$1+\frac{2}{\sqrt{x^2-1}}+\frac{1}{x^2-1}=\frac{1225}{144x^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^4}{x^2-1}+\frac{2x^2}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{1225}{144}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}+\frac{49}{12}\right)\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}-\frac{25}{12}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{25}{12}\Leftrightarrow 144x^4-625x^2+625=0$$

$$\Leftrightarrow (4x-5)(4x+5)(3-5)(3x+5)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{5}{4} \\ x=\frac{5}{3} \end{array}\right.\quad (x>1).$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=\frac{5}{4};\ x=\frac{5}{3}.$

b) Hệ đã cho tương đương với: $\begin{cases}(y+2)(x-3)=4x^2+5x-3\ (1)\\(y+2)^2=7x^2+16x-14\ (2)\end{cases}.$

Lấy $(2)-2\cdot(1),$ ta được:

$$\begin{aligned}&(y+2)^2-2(y+2)(x-3)=-x^2+6x-8\\&\Leftrightarrow (y+2)^2-2(y+2)(x-3)+(x-3)^2=1\\&\Leftrightarrow (y+2-x+3)^2=1\\&\Leftrightarrow (y-x+5)^2=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=x-6\\y=x-4\end{array}\right..\end{aligned}$$

Trường hợp 1: $y=x-6,$ thay vào $(1),$ ta được: $3x^2+12x-15=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\Rightarrow y=-5\\x=-5\Rightarrow x=-11\end{array}\right..$

Trường hợp 2: $y=x-4,$ thay vào $(1),$ ta được: $3x^2+10x-9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-5+2\sqrt{13}}{3}\Rightarrow y=\dfrac{-17+2\sqrt{13}}{3}\\y=-\dfrac{5+2\sqrt{13}}{3}\Rightarrow y=-\dfrac{17+2\sqrt{13}}{3}\end{array}\right..$

Vậy $S=\left\{(1;-5),\,(-5;-11),\left(\dfrac{-5+2\sqrt{13}}{3};\dfrac{-17+2\sqrt{13}}{3}\right),\left(-\dfrac{5+2\sqrt{13}}{3};-\dfrac{17+2\sqrt{13}}{3}\right)\right\}.$

Câu 3.

a) Phương trình đã cho tương đương:

$$\begin{aligned}&y^2(x-2)-(x-2)(x^4+2x+1)=0\\&\Leftrightarrow (x-2)\left[y^2-(x^4+2x+1)\right]=0\\&\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\y^2=x^4+2x+1\end{array}\right..\end{aligned}$$

Với $x=2,$ ta có mọi y nguyên đều thỏa mãn.

Với $y^2=x^4+2x+1,$ suy ra x^4+2x+1 là số chính phương. Ta xét hai trường hợp sau:

- $x>1$ thì $x^4<x^4+2x+1<(x^2+1)^2$. Do đó $x>1$ không thỏa mãn.
- $x<-1$ thì $x^4>x^4+2x+1>(x^2-1)^2$. Do đó $x<-1$ không thỏa mãn.

Thử trực tiếp:

- $x=0,$ ta được $y=1$ hoặc $y=-1.$
- $x=1,$ ta được $y=2$ hoặc $y=-2.$
- $x=-1,$ ta được $y=0.$

Vậy phương trình đã có có nghiệm $(x;y)=(2;a),(0;1),(0;-1),(1;2),(1;-2),(-1;0)$ với $a\in\mathbb{Z}$.

b) Ta có: $2^n=10a+b$ suy ra b chia hết cho 2 mà $0<b<10$ nên $b\in\{2;\ 4;\ 6;\ 8\}$.

Bây giờ đặt $n=4k+r$ với $k\in\mathbb{N}$ và $r\in\{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$.

Ta có: $2^n=2^{4k+r}=16^k\cdot 2^r\equiv 2^r\pmod{15}$.

Mà $2^r\in\{1;\ 2;\ 4;\ 8\}$ do đó 2^n chia 15 dư 1; 2; 4; 8.

- Nếu $a=3m+1$, thì $10a+b=10(3m+1)+b=30m+b+10$. Suy ra $2^n=10a+b\equiv b+10\pmod{15}$.

Do đó $b+10$ chia 15 dư 1; 2; 4; 8. Mà $b\in\{2;\ 4;\ 6;\ 8\}$ nên $b=6$. Nên $ab\,\vdots\,6$.

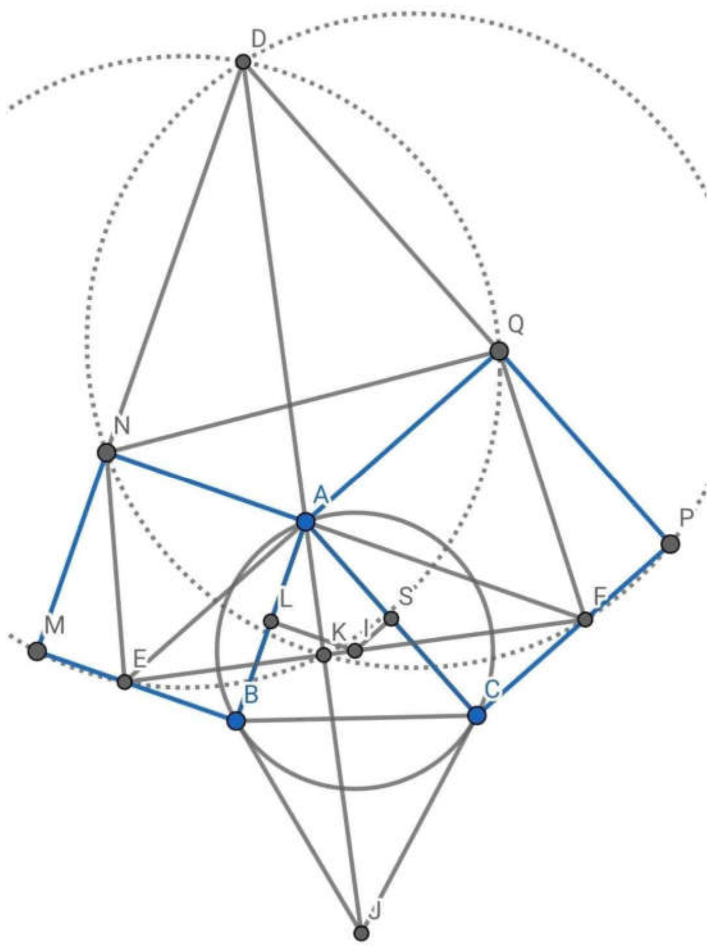
- Nếu $a=3m+2$, thì $10a+b=10\cdot(3m+2)+b=30m+b+20$. Suy ra $2^n=10a+b\equiv b+5\pmod{15}$.

Do đó b chia 15 dư 1; 2; 4; 8. Mà $b\in\{2;\ 4;\ 6;\ 8\}$ nên không có giá trị nào của b thỏa mãn. Hay không tồn tại a dạng $3m+2$ sao cho $2^n=10a+b$.

- Nếu $a=3m$ thì $ab=3mb$ mà b chẵn nên $ab\,\vdots\,6$.

Vậy trong mọi trường hợp a,b thỏa mãn $2^n=10a+b$ thì ab chia hết cho 6.

Câu 4.



a) Ta có: $\widehat{ABE}=\widehat{ACF}=90^0$ và $\widehat{BAE}=\widehat{CAF}$ (do cùng phụ với $\widehat{BAC}$).

Suy ra $\Delta ABE\sim\Delta ACF\Rightarrow\dfrac{AE}{AF}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AN}{AD}.$

Do đó $\Delta AEF\sim\Delta ANQ\Rightarrow\widehat{AFE}=\widehat{NQA}.$

Từ đó tứ giác $NQFE$ nội tiếp.

b) **Bổ đề:**

Nếu gọi M, N lần lượt là trung điểm của BD, AC với $ABCD$ là hình thang $\left(AB\parallel CD\right)$ thì $MN\parallel AB\parallel CD.$

Chứng minh: Gọi K là trung điểm của AD thì $KM\parallel AB\parallel CD$ và $KN\parallel DC\parallel AB.$

Từ đó suy ra K, M, N thẳng hàng hay $MN\parallel AB\parallel CD.$

Trở lại bài toán gọi S, L lần lượt là trung điểm của AC, $AB.$

Áp dung bổ đề trên cho hình thang $AFCE$ với I là trung điểm EF, S là trung điểm AC ta có $IS\parallel CF.$

Mà $CF\perp AC$ nên $IS\perp AC$ tại trung điểm S của AC hay IS là trung trực của AC $\left(1\right).$

Chứng minh tương tự ta cũng có IL là trung trực của AB $\left(2\right).$

Từ $\left(1\right)$ và $\left(2\right)$ suy ra I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC.$

c) Gọi K_1, K_2 lần lượt là giao điểm của DA với đường tròn ngoại tiếp ΔDMQ và $\Delta DNP.$

Do $\widehat{DME}=\widehat{DQE}=90^0$ nên DE là đường kính của đường tròn ngoại tiếp $\Delta DMQ.$

Suy ra $\widehat{DK_1E}=90^0.$

Chứng minh tương tự ta cũng có $\widehat{DK_2F}=90^0.$

Do đó tứ giác DQK_1E nội tiếp $\Rightarrow DA\cdot K_1A=EA\cdot QA.$

Tứ giác DNK_2F nội tiếp $\Rightarrow DA\cdot K_2A=FA\cdot NA.$

Theo câu a) tứ giác $NQFE$ nội tiếp nên $EA\cdot QA=FA\cdot NA.$

Từ đó suy ra $DA\cdot K_1A=DA\cdot K_2A$ hay $K_1\equiv K_2=\left(DMQ\right)\cap\left(DNP\right)=K.$

Do đó D, A, K thẳng hàng.

Ta có: $\widehat{BKE}=\widehat{EAB}=\widehat{CAF}=\widehat{CKF}.$ Suy ra $\widehat{BKC}=180^0-2\widehat{BKE}=2\left(90^0-\widehat{EAB}\right)=2\widehat{BAC}=\widehat{BIC}.$

Do đó tứ giác $BKIC$ nội tiếp, mà $IBJC$ nội tiếp và $JB=JC$ nên $\widehat{BKJ}=\widehat{CKJ}.$

Hay KJ là phân giác $\widehat{BKC}.$

Mặt khác $\widehat{BKA}=180^0-\widehat{AEB}=180^0-\widehat{AFC}.$ Suy ra tia đối của tia KA cũng là phân giác của $\widehat{BKC}.$

Do đó A, K, J thẳng hàng. Hay bốn điểm D, A, K, J thẳng hàng.

Câu 5.

Gọi các điểm lần lượt được đánh số là $A_1, A_2, A_3,..., A_{2024}$. Trong đó A_k với k lẽ được tô màu xanh, k chẵn được tô màu đỏ với $k = 1, 2,..., 2014.$

Giả sử $A_1 = x$ và $A_2 = y$ với x, y khác 0 và 1. Khi đó $A_3 \cdot A_1 = A_2 \Rightarrow A_3 = \dfrac{A_2}{A_1} = \dfrac{y}{x}.$

Do $A_2 + A_4 = A_3 \Rightarrow A_4 = A_3 - A_2 = \dfrac{y}{x} - y.$

Tương tự ta tính được $A_5 = 1 - x,\ A_6 = 1 - x - \dfrac{y}{x} + y,\ A_7 = 1 - \dfrac{y}{x},\ A_8 = x - y.$

Suy ra: $A_1 + A_2 + ... + A_8 = x + y + \dfrac{y}{x} + \left(\dfrac{y}{x} - y\right) + (1 - x) + \left(1 - x - \dfrac{y}{x} + y\right) + \left(1 - \dfrac{y}{x}\right) + x - y = 3.$

Ta tính được $A_9 = \dfrac{A_8}{A_7} = x$ và $A_{10} = y.$

Do $A_1 = A_9,\ A_2 = A_{10}$ nên quá trình này cứ tiếp tục thì thấy rằng cứ sau 8 điểm liên tiếp các số sẽ được lặp lại theo thứ thứ tự như 8 điểm ban đầu.

Do đó $\sum\limits_{i=1}^{2024} A_i = \dfrac{2024}{8} \cdot \sum\limits_{i=1}^{8} A_8 = \dfrac{2024}{8} \cdot 3 = 759.$

Vậy tổng các số cần tìm là 759.

--------------------- HẾT ---------------------