

Câu 1 (2,5 điểm).

a) Rút gọn biểu thức: $A = \sqrt{3}(\sqrt{12} - \sqrt{3})$

b) Tìm m để đường thẳng $y = (m-1)x + 3$ song song với đường thẳng $y = 2x + 1$

c) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 5x - 2y = 8 \end{cases}$$

Câu 2 (2,0 điểm).

Cho phương trình: $x^2 + 2(m+2)x + 4m - 1 = 0$ (1) (x là ẩn số, m là tham số)

a) Giải phương trình (1) khi $m = 2$

b) Chứng minh rằng với mọi giá trị của tham số m thì phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt. Gọi $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình (1), tìm m để $x_1^2 + x_2^2 = 30$

Câu 3 (1,5 điểm).

Một ô tô dự định đi từ bến xe A đến bến xe B cách nhau 90 km với vận tốc không đổi. Tuy nhiên, ô tô khởi hành muộn 12 phút so với dự định. Để đến bến xe B đúng giờ ô tô đã tăng vận tốc lên 5 km/h so với vận tốc dự định. Tìm vận tốc dự định của ô tô.

Câu 4 (3,5 điểm).

Cho đường tròn tâm O, bán kính R. Từ điểm C nằm ngoài đường tròn kẻ hai tiếp tuyến CA, CB và cát tuyến CMN với đường tròn (O) (A, B là hai tiếp điểm, M nằm giữa C và N). Gọi H là giao điểm của CO và AB.

a) Chứng minh tứ giác AOBC nội tiếp

b) Chứng minh $CH.CO = CM.CN$

c) Tiếp tuyến tại M của đường tròn (O) cắt CA, CB theo thứ tự tại E và F. Đường vuông góc với CO tại O cắt CA, CB theo thứ tự tại P, Q. Chứng minh $\widehat{POE} = \widehat{OFQ}$

d) Chứng minh: $PE + QF \geq PQ$

Câu 5 (0,5 điểm).

Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \sqrt{3a^2 + 2ab + 3b^2} + \sqrt{3b^2 + 2bc + 3c^2} + \sqrt{3c^2 + 2ca + 3a^2}$

SƠ LƯỢC LỜI GIẢI

Câu 1 (2,5 điểm).

a) $A = \sqrt{3}(\sqrt{12} - \sqrt{3}) = \sqrt{3}(2\sqrt{3} - \sqrt{3}) = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$

b) Đường thẳng $y = (m-1)x + 3$ song song với đường thẳng $y = 2x + 1$ khi:

$$\begin{cases} m-1=2 \\ 3 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow m=3$$

c) $\begin{cases} x+2y=4 \\ 5x-2y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x=12 \\ 2y=4-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ 2y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

Câu 2 (2,0 điểm).

Xét phương trình: $x^2 + 2(m+2)x + 4m - 1 = 0$ (1) (x là ẩn số, m là tham số)

a) Với $m = 2$, ta có pt: $x^2 + 8x + 7 = 0$

Do $a - b + c = 1 - 8 + 7 = 0$ nên pt có 2 nghiệm: $x_1 = -1$; $x_2 = -7$

b) +) Do $a = 1 \neq 0$ và $\Delta' = (m+2)^2 - (4m-1) = m^2 + 5 > 0 \forall m \Rightarrow$ Phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt.

+ $x_1^2 + x_2^2 = 30 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 30$ (*)

Do x_1, x_2 là hai nghiệm của pt (1), theo Viet: $x_1 + x_2 = -2(m+2)$; $x_1x_2 = 4m - 1$

Từ (*) suy ra: $4(m+2)^2 - 2(4m-1) = 30 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow m \in \{-3; 1\}$ (tmđk)

Câu 3 (1,5 điểm).

- Gọi vận tốc ô tô dự định đi từ A đến B là x (km/h), đk: $x > 0$
 \Rightarrow vận tốc ô tô thực tế đã đi từ A đến B là $x + 5$ (km/h)

Thời gian ô tô đi hết quãng đường AB với vận tốc dự định là: $\frac{90}{x}$ (h)

Thời gian ô tô đã đi hết quãng đường AB là: $\frac{90}{x+5}$ (h)

Ta có phương trình: $\frac{90}{x} - \frac{90}{x+5} = \frac{1}{5}$ (*) (đổi 12 phút = $\frac{1}{5}$ h)

- Từ (*), ta có: $x^2 + 5x - 2250 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 45 \text{ (tm)} \\ x_2 = -50 \text{ (loại)} \end{cases}$

- Vậy: Vận tốc dự định của ô tô là 45 km/h

Câu 4 (3,5 điểm).

a) Chứng minh tứ giác AOBC nội tiếp

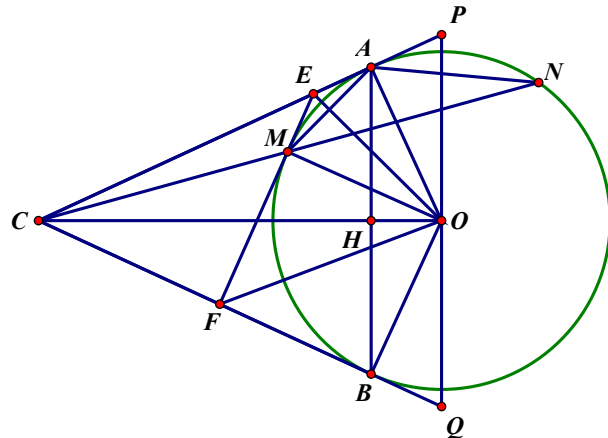
Có:

$$\begin{cases} \widehat{CAO} = 90^\circ \\ \widehat{CBO} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{CAO} + \widehat{CBO} = 180^\circ \Rightarrow$$

AOBC là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh $CH \cdot CO = CM \cdot CN$

+ CM: ΔCAO vuông tại A, $AH \perp CO$ suy ra $CA^2 = CH \cdot CO$ (2)



$$+) \text{ Có: } \begin{cases} \widehat{CAM} = \widehat{CNA} \\ \widehat{C} - \text{Chung} \end{cases} \Rightarrow \Delta CAM \sim \Delta CNA \Rightarrow \frac{CM}{CA} = \frac{CA}{CN} \Rightarrow CM.CN = CA^2 \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra : $CH.CO = CM.CN$

c) Chứng minh $\widehat{POE} = \widehat{OFQ}$

$$+) \widehat{OFQ} = \widehat{OCF} + \widehat{COF} = \widehat{OCP} + \widehat{COF} = \widehat{AOP} + \widehat{COF}$$

$$\begin{aligned} +) \widehat{POE} &= \widehat{POA} + \widehat{AOE} = \widehat{AOP} + \frac{1}{2}\widehat{AOM} = \widehat{AOP} + \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{AEM}) \\ &= \widehat{AOP} + 90^\circ - \frac{1}{2}(\widehat{ECF} + \widehat{CFE}) = \widehat{AOP} + 90^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{AOB}) - \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{MFB}) \\ &= \widehat{AOP} + \frac{1}{2}\widehat{AOB} - \frac{1}{2}(180^\circ - 180^\circ + \widehat{MOB}) = \widehat{AOP} + \widehat{COB} - \widehat{BOF} = \widehat{AOP} + \widehat{COF} \end{aligned}$$

Vậy: $\widehat{POE} = \widehat{OFQ}$

d) Chứng minh: $PE + QF \geq PQ$

$$+) \text{ Áp dụng BĐT Cô si: } PE + QF \geq 2\sqrt{PE.QF} \quad (4)$$

+) CM: ΔCPQ cân tại C $\Rightarrow \widehat{OPE} = \widehat{FQO}$ kết hợp $\widehat{POE} = \widehat{OFQ}$ suy ra $\Delta PEO \sim \Delta QOF$

$$\Rightarrow \frac{PE}{QO} = \frac{PO}{QF} \Rightarrow PE.QF = PO.QO = \left(\frac{PQ}{2}\right)^2 \quad (5)$$

Từ (4) và (5) suy ra: $PE + QF \geq PQ$

Câu 5 (0,5 điểm).

$$+) \text{ Ta có: } \sqrt{3a^2 + 2ab + 3b^2} = \sqrt{(a-b)^2 + 2(a+b)^2} \geq \sqrt{2(a+b)^2} = (a+b)\sqrt{2}$$

$$\text{T. t.ự: } \sqrt{3b^2 + 2bc + 3c^2} \geq (b+c)\sqrt{2}; \quad \sqrt{3c^2 + 2ca + 3a^2} \geq \sqrt{2}(c+a)$$

$$\text{Suy ra: } P \geq 2\sqrt{2}(a+b+c)$$

+) Áp dụng BĐT Cô si:

$$a+b+c = (a+1) + (b+1) + (c+1) - 3 \geq 2\sqrt{a} + 2\sqrt{b} + 2\sqrt{c} - 3 = 2.3 - 3 = 3$$

$$\text{Vậy: } P \geq 6\sqrt{2}$$

$$P = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b; b = c; c = a \\ \sqrt{a} = 1; \sqrt{b} = 1; \sqrt{c} = 1 \Leftrightarrow a = b = c = 1 \\ \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 3 \end{cases}$$

$$\text{KL: } P_{\min} = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow a = b = c = 1$$

• Có thể cm $a+b+c \geq 3$ bằng cách sau:

Áp dụng BĐT Bunhiacopxki với 3 bộ số: $(1; \sqrt{a}), (1; \sqrt{b}), (1; \sqrt{c})$ ta có:

$$\left(1.\sqrt{a} + 1.\sqrt{b} + 1.\sqrt{c}\right)^2 \leq 3(a+b+c) \Rightarrow 3^2 \leq 3(a+b+c) \Rightarrow a+b+c \geq 3$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } \frac{\sqrt{a}}{1} = \frac{\sqrt{b}}{1} = \frac{\sqrt{c}}{1}$$