

Câu 1 (2,0 điểm) Giải phương trình và hệ phương trình sau:

$$1) (2x - 1)(x + 2) = 0 \quad 2) \begin{cases} 3x + y = 5 \\ 3 - x = y \end{cases}$$

Câu 2 (2,0 điểm)

1) Cho hai đường thẳng (d): $y = -x + m + 2$ và (d'): $y = (m^2 - 2)x + 3$. Tìm m để (d) và (d') song song với nhau.

$$2) \text{Rút gọn biểu thức: } P = \left(\frac{x - \sqrt{x} + 2}{x - \sqrt{x} - 2} - \frac{x}{x - 2\sqrt{x}} \right) : \frac{1 - \sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}} \text{ với } x > 0; x \neq 1; x \neq 4.$$

Câu 3 (2,0 điểm)

1) Tháng đầu, hai tổ sản xuất được 900 chi tiết máy. Tháng thứ hai, do cải tiến kỹ thuật nên tổ I vượt mức 10% và tổ II vượt mức 12% so với tháng đầu, vì vậy, hai tổ đã sản xuất được 1000 chi tiết máy. Hỏi trong tháng đầu mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu chi tiết máy?

2) Tìm m để phương trình: $x^2 + 5x + 3m - 1 = 0$ (x là ẩn, m là tham số) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^3 - x_2^3 + 3x_1x_2 = 75$.

Câu 4 (3,0 điểm) Cho đường tròn tâm O, bán kính R. Từ một điểm M ở ngoài đường tròn, kẻ hai tiếp tuyến MA và MB với đường tròn (A, B là các tiếp điểm). Qua A, kẻ đường thẳng song song với MO cắt đường tròn tại E (E khác A), đường thẳng ME cắt đường tròn tại F (F khác E), đường thẳng AF cắt MO tại N, H là giao điểm của MO và AB.

1) Chứng minh: Tứ giác MAOB nội tiếp đường tròn.

2) Chứng minh: $MN^2 = NF \cdot NA$ và $MN = NH$.

3) Chứng minh: $\frac{HB^2}{HF^2} - \frac{EF}{MF} = 1$.

Câu 5 (1,0 điểm) Cho x, y, z là ba số thực dương thỏa mãn: $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất

$$\text{của biểu thức: } Q = \frac{x+1}{1+y^2} + \frac{y+1}{1+z^2} + \frac{z+1}{1+x^2}.$$

-----Hết-----

Họ và tên thí sinh:.....Số báo danh:.....

Chữ kí của giám thị 1:Chữ kí của giám thị 2:

HƯỚNG DẪN GIẢI:

Câu 1 (2,0 điểm)

$$1) (2x-1)(x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=0 \\ x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -2 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 3x+y=5 \\ 3-x=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+3-x=5 \\ y=3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=2 \\ y=3-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$$

Câu 2 (2,0 điểm)

$$1) (d) // (d') \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = m^2 - 2 \\ m + 2 \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 1 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1$$

$$\begin{aligned} 2) P &= \left(\frac{x - \sqrt{x} + 2}{x - \sqrt{x} - 2} - \frac{x}{x - 2\sqrt{x}} \right) : \frac{1 - \sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}} \\ &= \left[\frac{x - \sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 2)} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} \right] \cdot \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1} \\ &= \frac{x - \sqrt{x} + 2 - \sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 2)} \cdot \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1} \\ &= \frac{-2\sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 2)} \cdot \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1} \\ &= \frac{-2(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 2)} \cdot \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1} \\ &= \frac{-2}{\sqrt{x} + 1} \end{aligned}$$

Câu 3 (2,0 điểm)

- 1) Gọi số chi tiết máy mà tổ I và tổ II sản xuất được trong tháng đầu lần lượt là x và y.
Điều kiện: $x, y \in \mathbb{N}^*$; $x, y < 900$

Từ đề bài lập được hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = 900 \\ 1,1x + 1,12y = 1000 \end{cases}$$

Giải hệ được:
$$\begin{cases} x = 400 \\ y = 500 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy tháng đầu tổ I sản xuất được 400 chi tiết máy, tổ II sản xuất được 500 chi tiết máy.

- 2) $\Delta = 29 - 12m$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m \leq \frac{29}{12}$

Áp dụng hệ thức Vi-ét, ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -5 & (1) \\ x_1 x_2 = 3m - 1 & (2) \end{cases}$$

Cách 1:

(1) $\Leftrightarrow x_2 = -5 - x_1$, thay vào hệ thức $x_1^3 - x_2^3 + 3x_1x_2 = 75$ được:

$$x_1^3 + (5 + x_1)^3 + 3x_1(-5 - x_1) = 75$$

$$\Leftrightarrow x_1^3 + 6x_1^2 + 30x_1 + 25 = 0$$

Giải phương trình được $x_1 = -1$

$$\Rightarrow x_2 = -4$$

Thay x_1 và x_2 vào (2), tìm được $m = \frac{5}{3}$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy $m = \frac{5}{3}$ là giá trị cần tìm.

Cách 2:

$$x_1^3 - x_2^3 + 3x_1x_2 = 75$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = 75 - 3x_1x_2$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)[(x_1 + x_2)^2 - x_1x_2] = 3(25 - x_1x_2)$$

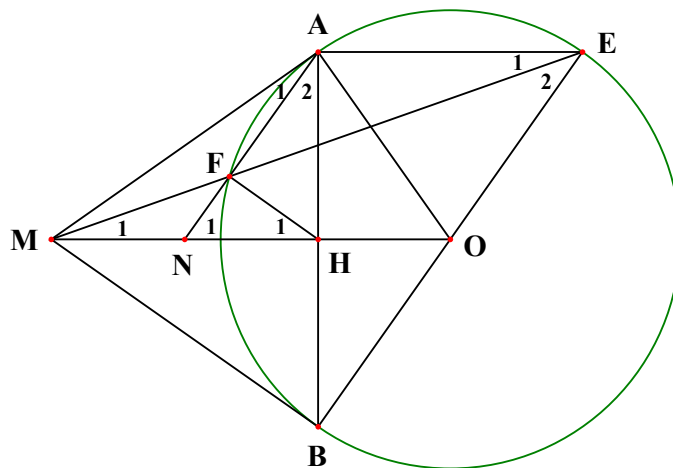
$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)(26 - 3m) = 3(26 - 3m)$$

$$\Leftrightarrow x_1 - x_2 = 3 \left(\text{do } m \leq \frac{29}{12} \Rightarrow 26 - 3m > 0 \right)$$

$$\text{Ta có hệ phương trình: } \begin{cases} x_1 + x_2 = -5 \\ x_1 - x_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -4 \end{cases}$$

Từ đó tìm được m .

Câu 4 (3,0 điểm)



1) Vì MA, MB là các tiếp tuyến của (O) nên $\widehat{MAO} = \widehat{MBO} = 90^\circ$

Tứ giác MAOB có $\widehat{MAO} + \widehat{MBO} = 180^\circ$

\Rightarrow Tứ giác MAOB nội tiếp đường tròn.

2)

* Ta có: $\widehat{M}_1 = \widehat{E}_1$ (so le trong, $AE \parallel MO$) và $\widehat{A}_1 = \widehat{E}_1 \left(= \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{AF} \right)$

$\Rightarrow \widehat{M}_1 = \widehat{A}_1$

ΔNMF và ΔNAM có: \widehat{MNA} chung; $\widehat{M}_1 = \widehat{A}_1$

$\Rightarrow \Delta NMF \simeq \Delta NAM$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{NM}{NA} = \frac{NF}{NM} \Rightarrow NM^2 = NF.NA$$

* Có $MA = MB$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau) và $OA = OB = R$

$\Rightarrow MO$ là đường trung trực của AB

$\Rightarrow AH \perp MO$ và $HA = HB$

ΔMAF và ΔMEA có: \widehat{AME} chung; $\widehat{A}_1 = \widehat{E}_1$

$\Rightarrow \Delta MAF \simeq \Delta MEA$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{MA}{ME} = \frac{MF}{MA} \Rightarrow MA^2 = MF.ME$$

Áp dụng hệ thức lượng vào Δ vuông MAO , có: $MA^2 = MH.MO$

$$\text{Do đó: } ME.MF = MH.MO \Rightarrow \frac{ME}{MH} = \frac{MO}{MF}$$

$\Rightarrow \Delta MFH \simeq \Delta MOE$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{H}_1 = \widehat{E}_2$

Vì \widehat{BAE} là góc vuông nội tiếp (O) nên E, O, B thẳng hàng

$$\Rightarrow \widehat{E}_2 = \widehat{A}_2 \left(= \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{EB} \right)$$

$\Rightarrow \widehat{H}_1 = \widehat{A}_2$

$\Rightarrow \widehat{N}_1 + \widehat{H}_1 = \widehat{N}_1 + \widehat{A}_2 = 90^\circ$

$\Rightarrow HF \perp NA$

Áp dụng hệ thức lượng vào Δ vuông NHA , có: $NH^2 = NF.NA$

$\Rightarrow NM^2 = NH^2 \Rightarrow NM = NH$.

3) Chứng minh: $\frac{HB^2}{HF^2} - \frac{EF}{MF} = 1$.

Áp dụng hệ thức lượng vào Δ vuông NHA , có: $HA^2 = FA.NA$ và $HF^2 = FA.FN$

Mà $HA = HB$

$$\Rightarrow \frac{HB^2}{HF^2} = \frac{HA^2}{HF^2} = \frac{FA.NA}{FA.FN} = \frac{NA}{NF}$$

Vì $AE \parallel MN$ nên $\frac{EF}{MF} = \frac{FA}{NF}$ (hệ quả của định lí Ta-lét)

$$\Rightarrow \frac{HB^2}{HF^2} - \frac{EF}{MF} = \frac{NA}{NF} - \frac{FA}{NF} = \frac{NF}{NF} = 1$$

Câu 5 (1,0 điểm)

Lời giải của Dương Thế Nam:

$$Q = \frac{x+1}{1+y^2} + \frac{y+1}{1+z^2} + \frac{z+1}{1+x^2} = \left(\frac{x}{1+y^2} + \frac{y}{1+z^2} + \frac{z}{1+x^2} \right) + \left(\frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+z^2} + \frac{1}{1+x^2} \right) = M + N$$

Xét $M = \frac{x}{1+y^2} + \frac{y}{1+z^2} + \frac{z}{1+x^2}$, áp dụng kỹ thuật Côsi ngược dấu ta có:

$$\frac{x}{1+y^2} = \frac{x(1+y^2) - xy^2}{1+y^2} = x - \frac{xy^2}{1+y^2} \geq x - \frac{xy^2}{2y} = x - \frac{xy}{2}$$

Tương tự: $\frac{y}{1+z^2} \geq y - \frac{yz}{2}$; $\frac{z}{1+x^2} \geq z - \frac{zx}{2}$; Suy ra

$$M = \frac{x}{1+y^2} + \frac{y}{1+z^2} + \frac{z}{1+x^2} \geq x + y + z - \frac{xy + yz + zx}{2} = 3 - \frac{xy + yz + zx}{2}$$

Lại có: $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \Rightarrow (x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx) \Rightarrow xy + yz + zx \leq 3$

$$\text{Suy ra: } M \geq 3 - \frac{xy + yz + zx}{2} \geq 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$

Xét: $N = \frac{1}{1+y^2} + \frac{1}{1+z^2} + \frac{1}{1+x^2}$, ta có:

$$\begin{aligned} 3 - N &= \left(1 - \frac{1}{1+y^2}\right) + \left(1 - \frac{1}{1+z^2}\right) + \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) \\ &= \frac{y^2}{1+y^2} + \frac{z^2}{1+z^2} + \frac{x^2}{1+x^2} \leq \frac{y^2}{2y} + \frac{z^2}{2z} + \frac{x^2}{2x} = \frac{x+y+z}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra: } N \geq 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$

Từ đó suy ra: $Q \geq 3$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$

Vậy $Q_{\min} = 3 \Leftrightarrow x = y = z = 1$