SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
BÌNH ĐỊNH

Đề chính thức

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2017 - 2018
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN

Môn: **TOÁN (Chuyên toán)**
Ngày thi: **04/06/2017**
Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian phát đề)

Bài 1: *(2,0 điểm)*

Cho biểu thức $A = \left(\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-1} - \dfrac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1}\right)\dfrac{x^2-2x+1}{2}$

a) Tìm điều kiện của x để biểu thức A có nghĩa. Rút gọn A
b) Tìm x để $A \geq 0$
c) Tìm giá trị lớn nhất của A.

Bài 2: *(2,0 điểm)*

1) Giải phương trình sau:

$$4x^4 + 4x^3 - 20x^2 + 2x + 1 = 0$$

2) Chứng minh rằng nếu số tự nhiên $\overline{abc}$ là số nguyên tố thì $b^2 - 4ac$ không là số chính phương.

Bài 3: *(1,0 điểm)*

Cho đa thức $f(x) = x^2 - 2(m+2)x + 6m + 1$ *(m là tham số)*. Bằng cách đặt $x = t + 2$. Tính f(x) theo t và tìm điều kiện của m để phương trình f(x) = 0 có hai nghiệm lớn hơn 2.

Bài 4: *(4,0 điểm)*

1. Cho đường tròn (T) tâm O đường kính AB, trên tiếp tuyến tại A lấy một điểm P khác A, điểm K thuộc đoạn OB *(K khác O và B)*. Đường thẳng PK cắt đường tròn (T) tại C và D *(C nằm giữa P và D)*, H là trung điểm của CD.

a) Chứng minh tứ giác AOHP nội tiếp được đường tròn.
b) Kẻ DI song song với PO, điểm I thuộc AB, chứng minh: $\widehat{PDI} = \widehat{BAH}$
c) Chứng minh đẳng thức $PA^2 = PC.PD$
d) BC cắt OP tại J, chứng minh AJ song song với DB.

2. Cho tam giác ABC vuông tại A. Từ điểm I thuộc miền trong tam giác, kẻ $IM \perp BC$, kẻ $IN \perp AC$, $IK \perp AB$. Tìm vị trí của I sao cho tổng $IM^2 + IN^2 + IK^2$ nhỏ nhất.

Bài 5: *(1,0 điểm)*

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xyz \leq 1$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{x(1-y^3)}{y^3} + \dfrac{y(1-z^3)}{z^3} + \dfrac{z(1-x^3)}{x^3} \geq 0$

Bài 1:

a) Điều kiện để A có nghĩa là $x \geq 0$ và $x \neq 1$

$$A = \left(\frac{\sqrt{x}-2}{x-1} - \frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1}\right)\frac{x^2-2x+1}{2} = \left(\frac{\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)} - \frac{\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}\right)\frac{(x-1)^2}{2}$$

$$= \left(\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2\left(\sqrt{x}-1\right)} - \frac{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2\left(\sqrt{x}-1\right)}\right)\frac{(x-1)^2}{2} =$$

$$\frac{x-\sqrt{x}-2-x-\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}+1\right)(x-1)}.\frac{(x-1)^2}{2} = \frac{-2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}{2\left(\sqrt{x}+1\right)} = -x+\sqrt{x}$$

b) $A \geq 0 \Leftrightarrow -x+\sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow x-\sqrt{x} \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{x} \leq 1$

$\Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$. Kết hợp với điều kiện ban đầu $x \geq 0$ và $x \neq 1$. Ta được: $0 \leq x < 1$

c) $A = -x+\sqrt{x} = -\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$ với mọi x

Dấu "=" xảy ra khi $\sqrt{x}-\frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$ (TMĐK $x \geq 0$ và $x \neq 1$)

Vậy GTLN của A là $\frac{1}{4}$ khi $x = \frac{1}{4}$

Bài 2:

1) x = 0 không phải là nghiệm của phương trình nên $x \neq 0$. Do đó chia cả hai vế phương trình cho $x^2 \neq 0$, ta được: $\left(4x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2\left(2x+\frac{1}{x}\right)-20 = 0$ (1)

Đặt: $y = 2x+\frac{1}{x} \Rightarrow 4x^2+\frac{1}{x^2} = y^2-4$.

Do đó PT (1) trở thành: $y^2+2y-24 = 0 \Leftrightarrow y = -6$; $y = 4$

Với y = – 6 ta có: $2x+\frac{1}{x} = -6 \Leftrightarrow 2x^2+6x+1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{-3+\sqrt{7}}{2}; x_2 = \frac{-3-\sqrt{7}}{2}$

Với y = 4 ta có: $2x+\frac{1}{x} = 4 \Leftrightarrow 2x^2-4x+1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{2+\sqrt{2}}{2}; x_2 = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là: $S = \left\{\frac{-3+\sqrt{7}}{2}; \frac{-3-\sqrt{7}}{2}; \frac{2+\sqrt{2}}{2}; \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right\}$

Cách 2: $4x^4+4x^3-20x^2+2x+1 = 0 \Leftrightarrow \left(4x^4+4x^3+x^2\right)-21x^2+2x+1 = 0$

$\Leftrightarrow \left(2x^2+x\right)^2+2\left(2x^2+x\right)+1-25x^2 \Leftrightarrow \left(2x^2+x+1\right)^2 = 25x^2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2+x+1 = 5x \\ 2x^2+x+1 = -5x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2-4x+1 = 0 \ (1) \\ 2x^2+6x+1 = 0 \ (2) \end{array}\right.$$

PT (1): $2x^2-4x+1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{2+\sqrt{2}}{2}; x_2 = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$

PT (2): $2x^2+6x+1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{-3+\sqrt{7}}{2}; x_2 = \frac{-3-\sqrt{7}}{2}$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là: $S = \left\{\frac{-3+\sqrt{7}}{2}; \frac{-3-\sqrt{7}}{2}; \frac{2+\sqrt{2}}{2}; \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right\}$

2) Chứng minh bằng phản chứng. Giả sử b^2-4ac là số chính phương m^2 $\left(m \in N\right)$

Xét $4a.\overline{abc} = 4a(100a+10b+c) = 400a^2+40ab+4ac = (20a+b)^2-\left(b^2-4ac\right)$

$= (20a + b)^2 - m^2 = (20a + b + m)(20a + b - m)$

Tồn tại một trong hai thừa số 20a + b + m, 20a + b – m chia hết cho số nguyên tố $\overline{abc}$. Điều này không xảy ra vì cả hai thừa số trên đều nhỏ hơn $\overline{abc}$.

Thật vậy, do m < b (vì $m^2 - b^2 - 4ac < 0$) nên:

$20a + b - m \le 20a + b + m < 100a + 10b + c = \overline{abc}$

Vậy nếu số tự nhiên $\overline{abc}$ là số nguyên tố thì $b^2 - 4ac$ không là số chính phương.

Bài 3:

Ta có: $h(t) = f(t + 2) = (t + 2)^2 - 2(m + 2)(t + 2) + 6m + 1$

$= t^2 + 4t + 4 - 2mt - 4m - 4t - 8 + 6m + 1$

$= t^2 - 2mt + 2m - 3$

$\Leftrightarrow\ t^2 - 2mt + 2m - 3 = 0\ (*)$

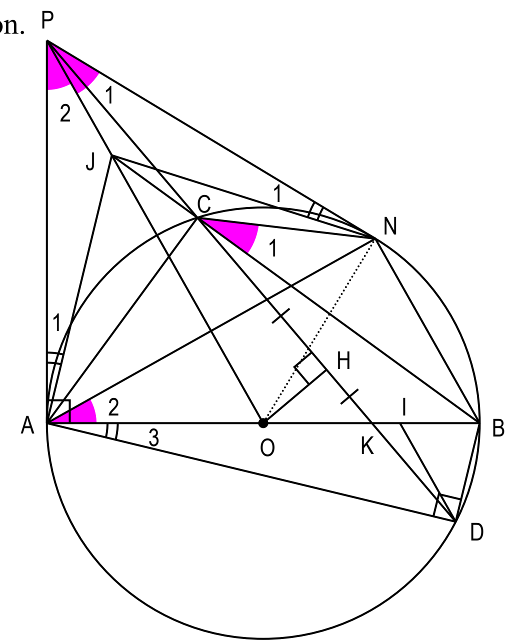
Phương trình: f(x) = 0 có 2 nghiệm lớn hơn 2 $\Leftrightarrow$ Phương trình h(t) = 0 có 2 nghiệm dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \ge 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2 + 2 > 0, \forall m \\ 2m - 3 > 0 \\ 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{3}{2}$$

Vậy với $m > \frac{3}{2}$ thì phương trình f(x) = 0 có 2 nghiệm lớn hơn 2.

Bài 4

1. a) Chứng minh tứ giác AOHP nội tiếp được đường tròn.



Ta có: OH $\perp$ CD tại H (vì HC = HD)

Do đó: $\widehat{OHP} + \widehat{OAP} = 90^0 + 90^0 = 180^0$

$\Rightarrow$ Tứ giác AOHP nội tiếp đường tròn đường kính OP

b) Chứng minh: $\widehat{PDI} = \widehat{BAH}$

$\widehat{PDI} = \widehat{DPO}$ (so le trong và DI // PO)

$\widehat{DPO} = \widehat{BAH}$ (vì nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{OH}$)

Do đó: $\widehat{PDI} = \widehat{BAH}$

c) Chứng minh đẳng thức $PA^2 = PC.PD$

$\Delta PAC \sim \Delta PDA$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{PA}{PD} = \dfrac{PC}{PA} \Rightarrow PA^2 = PC.PD$

d) Chứng minh AJ // DB.

Kẻ tiếp tuyến PN (N khác A) của đường tròn (T),

Với N là tiếp điểm.

Ta có chứng minh được PO là đường trung trực của NA

$\Rightarrow$ JA = JN

ΔAPJ và ΔNPJ có: PA = PN; $\widehat{P_2} = \widehat{P_1}$; JA = JN

$\Rightarrow \Delta APJ = \Delta NPJ$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{N_1}$ (1)

Ta có: $\widehat{C_1} = \widehat{A_2} = \widehat{P_1}$ (vì tứ giác PAON nội tiếp) và $\widehat{JCN} + \widehat{C_1} = 180^0$ (vì 2 góc kề bù)

$\Rightarrow\ \widehat{JCN} = \widehat{P_1} = 180^0 \Rightarrow$ Tứ giác NCJP nội tiếp được $\Rightarrow\ \widehat{N_1} = \widehat{A_3}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{A_1} = \widehat{A_3}$

Ta có: $\widehat{A_3} + \widehat{JAO} = \widehat{A_1} + \widehat{JAO} = 90^0 \Rightarrow$ JA $\perp$ AD tại A (3)

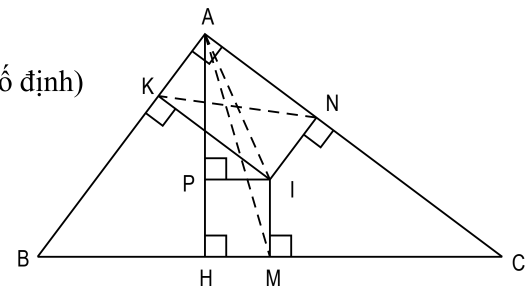
Có: $\widehat{ADB} = 90^0$ (vì nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow$ DB $\perp$ AD (4)

Từ (3) và (4) suy ra: AJ // DB

2. Bổ đề: Với a > 0; b > 0 ta có: $a^2 + b^2 \ge \frac{(a+b)^2}{2}$ (1). Dấu "=" xảy ra khi a = b

Thật vậy: (1) $\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 \ge a^2 + 2ab + b^2 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \ge 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \ge 0$ (BĐT đúng)

Dấu "=" xảy ra khi a = b. Vậy: $a^2 + b^2 \ge \frac{(a+b)^2}{2}$



Kẻ đường cao AH $\Rightarrow$ H là điểm cố định (vì A, B, C cố định)
Gọi P là hình chiếu vuông góc của M trên AH.
Áp dụng định lý Pytago cho các tam giác vuông INA, IPA ta có: $IN^2 + AN^2 = IN^2 + IK^2 = IA^2 \ge PA^2$
Mặt khác: IN = PH nên:
$IM^2 + IN^2 + IK^2 \ge PH^2 + PA^2$
Áp dụng bổ đề trên ta có:

$IM^2 + IN^2 + IK^2 \ge PH^2 + PA^2 \ge \frac{(PH+PA)^2}{2} = \frac{AH^2}{2}$: không đổi (vì A, H cố định)

Dấu "=" xảy ra khi $IA = PA = PH = \frac{AH}{2}$ $\Leftrightarrow$ I là trung điểm của đường cao AH

Vậy khi I là trung điểm của đường cao AH thì tổng $IM^2 + IN^2 + IK^2$ đạt GTNN là $\frac{AH^2}{2}$

Cách 2:

$IM^2 + IN^2 + IK^2 = IM^2 + KN^2$ (vì $IN^2 + IK^2 = KN^2$)
$= IM^2 + IA^2$

Theo bổ đề, ta có: $IM^2 + IN^2 + IK^2 = IM^2 + IA^2 \ge \frac{(IM+IA)^2}{2} \ge \frac{AM^2}{2} \ge \frac{AH^2}{2}$: không đổi

Dấu "=" xảy ra khi A, I, M thẳng hàng, M trùng H và IM = IA
$\Leftrightarrow$ I là trung điểm của đường cao AH

Vậy khi I là trung điểm của đường cao AH thì tổng $IM^2 + IN^2 + IK^2$ đạt GTNN là $\frac{AH^2}{2}$

Bài 5:

Ta có: $\frac{x(1-y^3)}{y^3} + \frac{y(1-z^3)}{z^3} + \frac{z(1-x^3)}{x^3} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{x}{y^3} + \frac{y}{z^3} + \frac{z}{x^3} \ge x + y + z$

Ta có: xyz $\le$ 1 nên $\frac{1.x}{y^3} + \frac{1.y}{z^3} + \frac{1.z}{x^3} \ge \frac{x^2z}{y^2} + \frac{y^2x}{z^2} + \frac{z^2y}{x^2}$ (1)

Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho 3 số dương: $\frac{x^2z}{y^2}$; $\frac{y^2x}{z^2}$; z, ta được:

$\frac{x^2z}{y^2} + \frac{y^2x}{z^2} + z \ge 3x$; tương tự: $\frac{y^2x}{z^2} + \frac{z^2y}{x^2} + x \ge 3y$ và $\frac{z^2y}{x^2} + \frac{x^2z}{y^2} + y \ge 3z$

Cộng theo vế ta được: $2\left(\frac{x^2z}{y^2} + \frac{y^2x}{z^2} + \frac{z^2y}{x^2}\right) + x + y + z \ge 3(x+y+z)$ (2)

$\Leftrightarrow \frac{x^2z}{y^2} + \frac{y^2x}{z^2} + \frac{z^2y}{x^2} \ge x + y + z$

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{x}{y^3} + \frac{y}{z^3} + \frac{z}{x^3} \ge x + y + z$. Dấu "=" xảy ra khi x = y = z = 1