

Câu 1 (2,5 điểm) Cho biểu thức $P = \frac{2x-3\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2}$ và $Q = \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{x}+2x-2}{\sqrt{x}+2}$

với $x \geq 0; x \neq 4$

a. Rút gọn biểu thức P và Q b. Tìm tất cả giá trị x để P=Q

Câu 2 (2,5 điểm)

a. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \frac{4a+6b+2017c}{4a-6b+2017c}$$

b. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 2y = xy + 4 \\ x^2 - x + 3 - x\sqrt{6} = (y-3)\sqrt{y-3} \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$

Câu 3 (1,5 điểm)

a. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c \leq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

thức $M = \frac{a^2+6a+3}{a^2+a} + \frac{b^2+6b+3}{b^2+b} + \frac{c^2+6c+3}{c^2+c}$

b. Cho tam giác vuông có số đo các cạnh là các số tự nhiên có hai chữ số. Nếu đổi chỗ hai chữ số của số đo cạnh huyền ta được số đo một cạnh góc vuông. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đó

Câu 4 (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB < AC$, nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt đường thẳng BC tại M. Kẻ đường cao BF của tam giác ABC (F thuộc AC). Từ F kẻ đường thẳng song song với MA cắt AB tại E. Gọi H là giao điểm của CE và BF, D là giao điểm của AH và BC.

a. Chứng minh $MA^2 = MB \cdot MC$ và $\frac{MC}{MB} = \frac{AC^2}{AB^2}$ b. Chứng minh rằng AH vuông góc với BC tại D

c. Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh rằng bốn điểm E, F, D, I cùng nằm trên một đường tròn

d. Từ H kẻ đường thẳng vuông góc với HI cắt AB, AC lần lượt tại P và Q. Chứng minh rằng H là trung điểm của PQ

Câu 5 (0,5 điểm)

Cho $2n+1$ số nguyên, trong đó có đúng một số 0 và các số $1, 2, 3, \dots, n$ mỗi số xuất hiện hai lần. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta luôn sắp xếp được $2n+1$ số nguyên trên thành một dãy sao cho với mọi $m=1, 2, \dots, n$ có đúng m số nằm giữa hai số m