ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN NĂM 2017
MÔN THI : TOÁN (Cho tất cả các thí sinh)
Thời gian làm bài : 120 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu I. (3.5 điểm)

1) Giải hệ phương trình.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 1 \\ x + x^2 y = 2y^3 \end{cases}$$

2) Giải phương trình : $2(x+1)\sqrt{x+1} = \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x}\right)\left(2 - \sqrt{1-x^2}\right)$

Câu II. (2.5 điểm)

1)Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên x, y thỏa mãn đẳng thức

$$12x^2 + 26xy + 15y^2 = 4617$$

2) Với a, b là các số thực dương , tìm giá trị lớn nhát của biểu thức

$$M = (a+b)\left(\frac{1}{a^3+b} + \frac{1}{b^3+a}\right) - \frac{1}{ab}$$

Câu III. (3 điểm)

Cho hình thoi ABCD có $\widehat{BAD} < 90^0$. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABD tiếp xúc với BD,BA lần lượt tại J, L. Trên đường thẳng LJ lấy điểm K sao cho BK song song ID.

a)Chứng minh rằng $\widehat{CBK} = \widehat{ABI}$.

b)Chứng minh rằng $KC \perp KB$.

c)Chứng minh rằng bốn điểm C, K, I ,L cùng nằm trên một đường tròn.

Câu IV. (1 điểm)

Tìm tập hợp số nguyên dương n sao cho tồn tại một cách sắp xếp các số 1, 2, ,3,.., n thành $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ mà khin chia các số $a_1, a_1 a_2, a_1 a_2 a_3, ..., a_1 a_2 ... a_n$ cho n ta được các số dư đôi một khác nhau

Họ và tên thí sinh:……………………………….Số báo danh:……………….
Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

ĐÁP ÁN THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN NĂM 2017
MÔN THI : TOÁN (Cho tất cả các thí sinh)

<u>Câu I</u>. (3.5 điểm)

1) Giải hệ phương trình.

$$\begin{cases} x^2+y^2-xy=1 \\ x+x^2y=2y^3 \end{cases}$$

2) Giải phương trình : $2(x+1)\sqrt{x+1}=\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\right)\left(2-\sqrt{1-x^2}\right)$

hướng dẫn giải

1)Giải hệ phương trình.

$$\begin{cases} x^2+y^2-xy=1(1) \\ x+x^2y=2y^3(2) \end{cases}$$

Từ phương trình (1) suy ra ra: xy=x^2+y^2-1 (3) thay vào (2) ta được

$x+x(x^2+y^2-1)=2y^3$

$\Leftrightarrow x+x^3+xy^2-x-2y^3=0$

$\Leftrightarrow x^3+xy^2-y^3-y^3=0$

$\Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2)+y^2(x-y)=0$

$\Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+2y^2)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x-y=0 & (4) \\ x^2+xy+2y^2=0 & (5) \end{array}\right.$

từ (4) ta có x=y Thay vào 1 ta có :

$x^2+x^2-x^2=1 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=1 \\ x=y=-1 \end{array}\right.$

từ (5) ta có :

$x^2+xy+2y^2=0 \Leftrightarrow x^2+2x.\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}y^2+\frac{7}{4}y^2=0$

$\Leftrightarrow (x+\frac{1}{2}y)^2+\frac{7}{4}y^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+\frac{1}{2}y=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=0$

với x=y=0 thay vào (1) ta có : 0+0-0=1 (vô lí)

suy ra x=y=0 không là nghiệm của hệ phương trình đã cho.

Vậy hệ phương trình đã cho có S=$\{(1;1);(-1;-1)\}$

2) Giải phương trình: ĐKXĐ: $-1\le x\le 1$

$$2(x+1)\sqrt{x+1}=\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\right)\left(2-\sqrt{1-x^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2(x+1)\sqrt{x+1}=2\sqrt{x+1}+2\sqrt{1-x}-(x+1)\sqrt{1-x}-(1-x)\sqrt{x+1}$$

$$\Leftrightarrow 2(x+1)\sqrt{x+1}+(x+1)\sqrt{1-x}=\sqrt{x+1}(2-1+x)+2\sqrt{1-x}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(2\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x})=2\sqrt{x+1}+2\sqrt{1-x}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x})=2\sqrt{1-x} \quad (*)$$

đặt: $\begin{cases}\sqrt{x+1}=a\geq 0\\ \sqrt{1-x}=b\geq 0\end{cases}$

Khi đó (*) trở thành: $a^2(a+b)=2b \Leftrightarrow a^3+a^2b=2b$ (1)

mặt khác ta có $a^2+b^2=2$ (2)

Xét với b=0 ta có $\begin{cases}a^3=0\\ a^2=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=0\\ a^2=2\end{cases}(ktm)$

Xét với $b\neq 0$ Từ (2) ta có: $a^2b+b^3=2b$ (3)

Từ (1) Và (3) suy ra : $a^3+a^2b-a^2b-b^3=0 \Leftrightarrow a^3=b^3 \Leftrightarrow a=b$

Khi đó từ (2) suy ra: $2a^2=2$ suy ra a=1 (vì $a\geq 0$)

Do đó a=b=1 $\Rightarrow \sqrt{x+1}=\sqrt{1-x}=1 \Leftrightarrow x=0(tm)$

vậy phương trình có nghiệm x=0

Câu II. (2.5 điểm)

1)Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên x, y thỏa mãn đẳng thức

$$12x^2+26xy+15y^2=4617$$

2) Với a, b là các số thực dương , tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M=(a+b)\left(\frac{1}{a^2+b}+\frac{1}{b^2+a}\right)-\frac{1}{ab}$$

Hướng dẫn giải

1)Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên x, y thỏa mãn đẳng thức

$$12x^2+26xy+15y^2=4617$$

Chứng minh bổ đề: Nếu số nguyên tố p có dạng: 4n+3 thì $a^2+b^2 \vdots p \Leftrightarrow \begin{cases}a\vdots p\\ b\vdots p\end{cases}(a,b\in Z)$

(Tự chứng minh)

Ta có:

$$12x^2+26xy+15y^2=4617 \Leftrightarrow 12x^2+26xy+15y^2=3^5.19$$

$$\Leftrightarrow 12x^2+26xy+15y^2 \vdots 19$$

$$\Leftrightarrow 12x^2-12xy+15y^2+38xy \vdots 19$$

$$\Leftrightarrow 3(4x^2-4xy+5y^2) \vdots 19$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-4xy+5y^2 \vdots 19$$

$$\Leftrightarrow (4x^2-4xy+y^2)+4y^2=(2x-y)^2+(2y)^2 \vdots 19$$

Áp dụng bổ đề trên ta có 19 là số nguyên tố và19= 4.4+3 nên suy ra :

$$\begin{cases} 2x - y \vdots 19 \\ 2y \vdots 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \vdots 19 \\ y \vdots 19 \end{cases} \Rightarrow 12x^2 + 26xy + 15y^2 \vdots 19^2$$

điều này không xảy ra vì 4617 không chia hết cho19^2
vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.
2) Với a, b là các số thực dương , tìm giá trị lớn nhát của biểu thức

$$M = (a+b)\left(\frac{1}{a^3+b} + \frac{1}{b^3+a}\right) - \frac{1}{ab}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopsky ta có:

$$\left(a^3+b\right)\left(\frac{1}{a}+b\right) \ge (\sqrt{a^3.\frac{1}{a}} + \sqrt{b.b}) = (a+b)^2$$

$$\left(b^3+a\right)\left(\frac{1}{b}+a\right) \ge (\sqrt{b^3.\frac{1}{b}} + \sqrt{a.a}) = (a+b)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{a^3+b} \le \dfrac{\frac{1}{a}+b}{(a+b)^2} \\ \dfrac{1}{b^3+a} \le \dfrac{\frac{1}{b}+a}{(a+b)^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{a^3+b} + \frac{1}{b^3+a} \le \frac{a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{(a+b)^2}$$

$$\Rightarrow M = (a+b)\left(\frac{1}{a^3+b} + \frac{1}{b^3+a}\right) - \frac{1}{ab} \le \frac{a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{a+b} - \frac{1}{ab} = \frac{ab(a+b)+a+b-a-b}{ab(a+b)} = 1$$

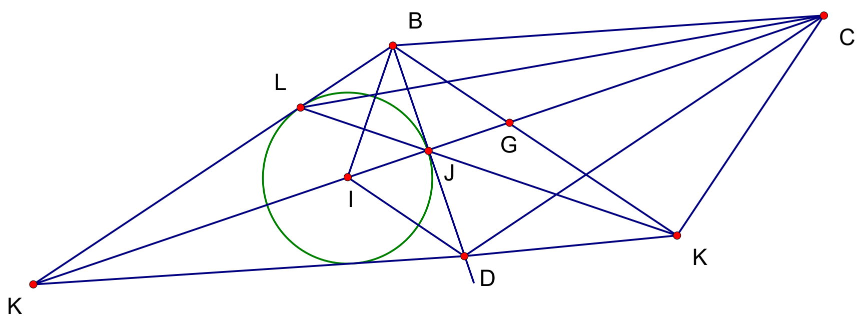
vậyMax M=1 khi a=b=1

<u>Câu III</u>. (3 điểm)

Cho hình thoi ABCD có $\widehat{BAD} < 90^0$. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABD tiếp xúc với BD,BA lần lượt tại J, L. Trên đường thẳng LJ lấy điểm K sao cho BK song song ID.

a)Chứng minh rằng $\widehat{CBK} = \widehat{ABI}$.
b)Chứng minh rằng $KC \perp KB$.
c)Chứng minh rằng bốn điểm C, K, I ,L cùng nằm trên một đường tròn .

Hướng dẫn giải



a) Ta có $\widehat{ABI}=\widehat{IBD}=\widehat{ADI}=\widehat{DBK}$ mà

$\widehat{CBD}=\widehat{ADB}(so\,le\,trong)$

$\Rightarrow \widehat{CBD}-\widehat{DBK}=\widehat{ADB}-\widehat{IDB}$

$\Rightarrow \widehat{CBK}=\widehat{ADI}=\widehat{ABI}$

Vậy $\widehat{CBK}=\widehat{AIB}$

b)Gọi G là giao điểm của CJ và BK

ta có $\widehat{KJG}=\widehat{IJL}$ (Đối đỉnh)

và $\widehat{IJL}=\widehat{JBK}$ (Cùng phụ với $\widehat{BIJ}$)

$\Rightarrow \widehat{KJG}=\widehat{JBI}$

Mà $\widehat{JBI}=\widehat{ABI}=\widehat{CBK}\Rightarrow \widehat{KJG}=\widehat{CBK}$

Suy ra tứ giác BCKJ nội tiếp suy ra $\widehat{BKJ}=\widehat{BJC}=90^0$ (vì ABCD là hình thoi nên $AC\perp BD$ hay góc BJC vuông) suy ra $BK\perp CK$

c)Vì tam giác IJL cân tại I (J,L Thuộc đường tròn (I)) nên $\widehat{IJL}=\widehat{ILJ}$ mà $\widehat{IBJ}=\widehat{JBK}$ (Theo b) và $\widehat{JBK}=\widehat{JCK}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn cung JK) suy ra $\widehat{ILJ}=\widehat{JLC}$ hay $\widehat{ILK}=\widehat{ICK}$ suy ra tứ giác IKCL nội tiếp suy ra 4 điểm C, K, I, L cùng nằm trên một đường tròn.

Câu IV. (1 điểm)

Tìm tập hợp số nguyên dương n sao cho tồn tại một cách sắp xếp các số 1, 2, ,3,.., n thành $a_1,a_2,a_3,....,a_n$ mà khi chia các số $a_1,a_1a_2,a_1a_2a_3,....,a_1a_2...a_n$ cho n ta được các số dư đôi một khác nhau

Hướng dẫn giải:

Trước hết ta đi chứng minh bổ đề sau: Với n là hợp số và n>4 thì (n-1)! $\vdots$ n

Thật vậy ta có: Với n là hợp số và n>4 thì n=a.b với a,b là các số nguyên khác 1 và n. suy ra $2\le a;b\le n-1$ suy ra n-1)! $\vdots$ n

từ giả thiết ta có a_n phải bằng n vì nếu $a_n\neq n$; $a_i=n$ ($i\in[1;n-1]$) thì

$\begin{cases} a_1a_2...a_i \vdots n \\ a_1a_2...a_n \vdots n \end{cases}$ điều này trái với đề bài cho.

Do đó $a_n=n$

nếu n là một số lớn hơn 4và n là hợp số . theo bổ đề trên ta có $a_1a_2...a_{n-1}=(n-1)!\vdots n$

mà $a_1a_{2...}a_n \vdots n$ do đó hai số này $\vdots$ chia cho n có cùng số dư là 0 điều này mâu thuẫn với giả thiết.

Như vậy $n \leq 4$ suy ra n=4(vì n là hợp số)

Xét với n =4 thì tồn tại dãy số: 1;3;2;4 có 1; 1.3; 1.3.2;1.3.2.4 khi chia cho 4 có số dư lần lượt là 1;3;2;0 thoả mãn đề bài.

vậy n=4