BỘ GIÁO DỤC ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

CỘNG HOÀ XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM
Độc Lập -Tự Do -Hạnh Phúc

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI TUYỂN SINH
VÀO TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG CHUYÊN NĂM 2017
Môn thi: Toán
(Dùng riêng cho học sinh chuyên Toán và chuyên Tin)
Thời gian : 150 phút

Câu 1. (1.5 điểm)
Cho các số dương a,b,c,d . Chứng minh rằng trong 4 số

$a^2+\frac{1}{b}+\frac{1}{c};b^2+\frac{1}{c}+\frac{1}{d};c^2+\frac{1}{d}+\frac{1}{a};d^2+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ Có ít nhất một số không nhỏ hơn 3.

Câu 2. (1.5 điểm) Giải phương trình :

$$\sqrt{\left(x^2+2x\right)^2+4\left(x+1\right)^2}-\sqrt{x^2+\left(x+1\right)^2+\left(x^2+x\right)^2}=2017$$

Câu 3. (3.0 điểm)
1.Tìm tất cả các số nguyên dương a,b,c,d thỏa mãn $a^2=b^3;c^3=d^4;a=d+98$

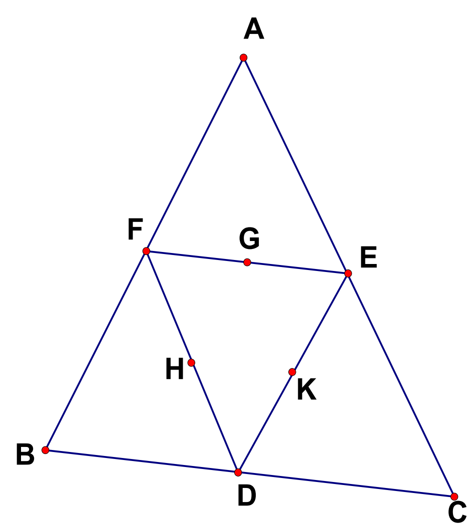
2.Tìm tất cả các số thực x sao cho trong 4 số $x-\sqrt{2};x^2+2\sqrt{2};x-\frac{1}{x};x+\frac{1}{x}$ có đúng một số không phải là số nguyên.

Câu 4. (3điểm) Cho đường tròn (O) bán kính R và một điểm M nằm ngoài (O) .Kẻ hai tiếp tuyến MA, MB tới đường tròn (O) (A, B là hai tiếp điểm). Trên đoạn thẳng AB lấy điểm C (C khác A, C khác B). Gọi I; K là trung điểm MA, MC .Đường thẳng KA cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai D.

1. Chứng minh $KO^2-KM^2=R^2$
2.Chứng minh tứ giác BCDM là tứ giác nội tiếp.
3.Gọi E là giao điểm thứ hai của đường thẳng MD với đường tròn (O) và N là trung điểm KE đường thẳng KE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai F. Chứng minh rằng bốn điểm I, A, N, F cùng nằm trên một đường tròn.

Câu 5. (1.0 điểm)

Xét hình bên : Ta viết các số 1, 2,3,4,..9 vào vị trí của 9 điểm trong hình vẽ bên sao cho mỗi số chỉ xuất hiện đúng một lần và tổng ba số trên một cạnh của tam giác bằng 18. Hai cách viết được gọi là như nhau nếu bộ số viết ở các điểm (A;B;C;D;E;F;G;H;K) của mỗi cách là trùng nhau. Hỏi có bao nhiêu cách viết phân biệt ? Tại sao?



-------------Hết-----------

Họ và tên thí sinh:………………………………..Số báo danh:……………….
Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Vòng 2

Câu 1. (1.5 điểm)

Giả sử cả bốn số đều nhỏ hơn 3 thì

$$P=a^2+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+b^2+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+c^2+\frac{1}{d}+\frac{1}{a}+d^2+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<3$$

Mặt khác

$$P=a^2+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+b^2+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+c^2+\frac{1}{d}+\frac{1}{a}+d^2+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=a^2+b^2+c^2+d^2+2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$$

$$Do\ \ 4\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)\ge\left(a+b+c+d\right)^2;\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\ge\frac{4}{a+b+c+d}\Rightarrow$$

$$P\ge\frac{\left(a+b+c+d\right)^2}{4}+\frac{16}{a+b+c+d}+\frac{16}{a+b+c+d}\ge3\sqrt[3]{\frac{\left(a+b+c+d\right)^2}{4}.\frac{16}{a+b+c+d}.\frac{16}{a+b+c+d}}=12$$

Trái điều giả sử suy ra có ít nhất một số không nhỏ hơn 3.

Câu 2. (1.5 điểm) Giải phương trình

$$\sqrt{\left(x^2+2x\right)^2+4\left(x+1\right)^2}-\sqrt{x^2+\left(x+1\right)^2+\left(x^2+x\right)^2}=2017$$

ĐKXĐ $\forall x\in R$

$$\sqrt{\left(x^2+2x\right)^2+4\left(x+1\right)^2}-\sqrt{x^2+\left(x+1\right)^2+\left(x^2+x\right)^2}=2017$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x^4+2x^3+4x^2+4x^2+8x+8}-\sqrt{x^2+x^2+2x+1+x^4+2x^3+x^2}=2017$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{\left(x^2+2x+2\right)^2}-\sqrt{\left(x^2+x+1\right)^2}=2017\Leftrightarrow x^2+2x+2-x^2-x-1=2017\Leftrightarrow x=2016$$

Câu 3. (3.0 điểm)

1.Tìm tất cả các số nguyên dương a,b,c,d thỏa mãn $a^2=b^3;c^3=d^4;a=d+98$

2.Tìm tất cả các số thực x sao cho trong 4 số $x-\sqrt{2};x^2+2\sqrt{2};x-\frac{1}{x};x+\frac{1}{x}$ có đúng một số không phải là số nguyên.

Hướng dẫn

1.Giả sử $a=p_1^{x_1}.p_2^{x_2}.p_3^{x_3}....p_n^{x_n}$ trong đó $p_1;p_2;...,p_n$ là các số nguyên tố $x_1;x_2;...;x_n\in N$

Tượng tự $d=q_1^{y_1}.q_2^{y_2}.q_3^{y_3}....q_n^{y_n}$ trong đó $q_1;q_2;...,q_n$ là các số nguyên tố $y_1;y_2;...;y_n\in N$

Ta có a,d >1

Vì

$$a^2=p_1^{2x_1}.p_2^{2x_2}.p_3^{2x_3}....p_n^{2x_n}=b^3\Rightarrow2x_1,2x_2,2x_3,...,2x_3\vdots3\Rightarrow x_1,x_2,x_3,...,x_3\vdots3\Rightarrow a=x^3,\left(x\in Z^+\right)$$

Chứng minh tương tự $d=y^3,(y\in Z^+)$ từ giả thiết

$$a=d+98\Rightarrow x^3=y^3+98\Leftrightarrow\left(x-y\right)\left(x^2+xy+y^2\right)=98\ vi\ a>d\Rightarrow x-y>0$$

$$\left(x-y\right)^2=x^2-2xy+y^2<x^2+xy+y^2\Rightarrow x-y<x^2+xy+y^2$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x-y=1\\x^2+xy+y^2=98\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y+1\\\left(y+1\right)^2+\left(y+1\right)y+y^2=98\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y+1\\3y^2+3y-97=0\end{cases}\Rightarrow y\notin Z\Rightarrow x\notin Z$$

Hoặc

$\begin{cases} x-y=2 \\ x^2+xy+y^2=49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+2 \\ (y+2)^2+(y+2)y+y^2=49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+2 \\ y^2+2y-15=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=3 \\ x=5 \end{cases} \\ \begin{cases} y=-5<0 \\ x=-3<0 \end{cases} \end{array} \right.$

$\Rightarrow x=5; y=3$

Vậy $a=5^3=125; d=3^3=27; b=25; c=81$

2.Nếu $x-\frac{1}{x}; x+\frac{1}{x}$ nguyên ta có $x-\frac{1}{x}+x+\frac{1}{x}=2x \in Z \Rightarrow x \in Q$ suy ra $x-\sqrt{2}; x^2+2\sqrt{2}$ đều không là số hữu tỷ do vậy một trong hai số $x-\frac{1}{x}; x+\frac{1}{x}$ không là số nguyên khi đó

$x-\sqrt{2}; x^2+2\sqrt{2} \in Z \Rightarrow x-\sqrt{2}+x^2+2\sqrt{2} \in Z$

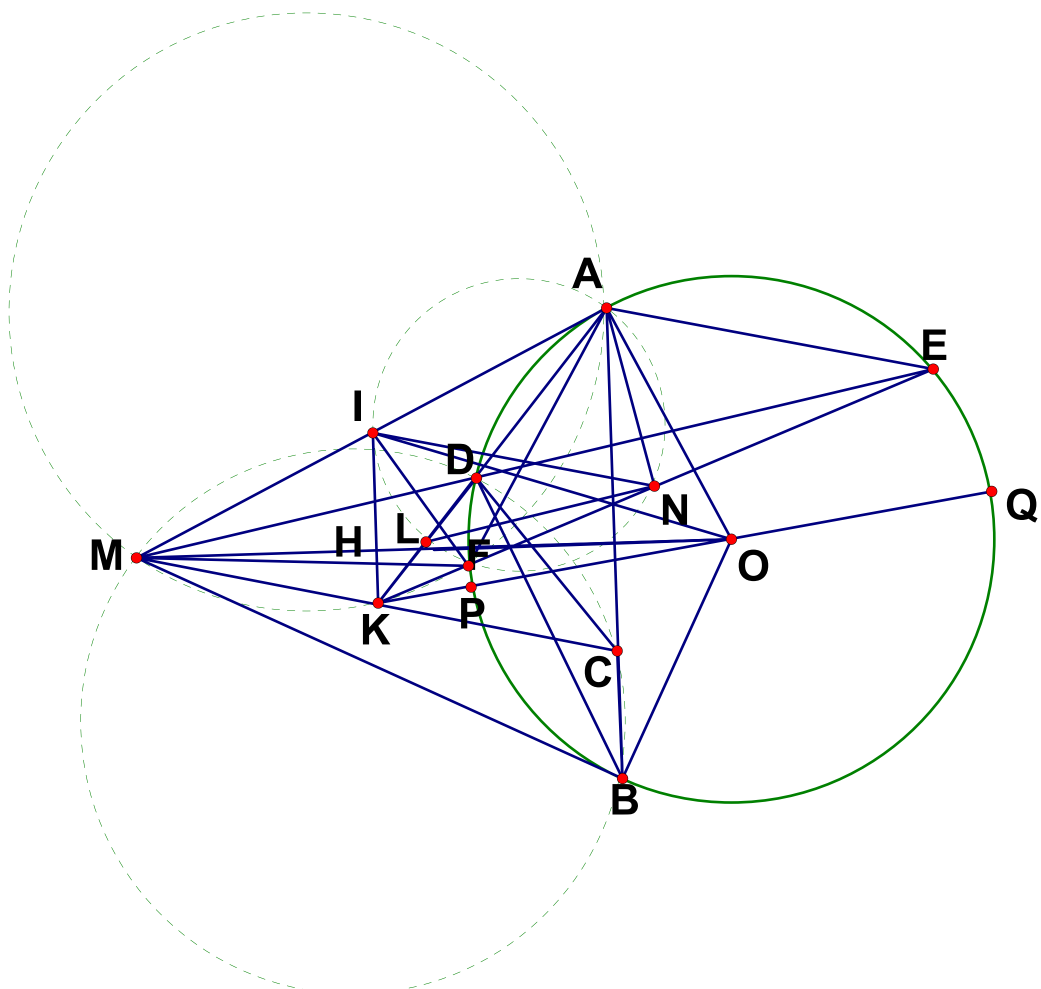
Đặt

$x-\sqrt{2}=a,(a \in Z) \Rightarrow x^2+2\sqrt{2}=\left(a+\sqrt{2}\right)^2+2\sqrt{2}=a^2+2+2\sqrt{2}(a+1) \in Z$

$\Rightarrow 2\sqrt{2}(a+1) \in Z \Rightarrow a+1=0 \Rightarrow a=-1$

Thử lại đúng vậy $x=\sqrt{2}-1$

Câu 4. **(3điểm)**



a) Ta có IM = IA và KM = KC $\Rightarrow$ IK là đường trung bình $\Delta AMC \Rightarrow IK // AC$.
AC = AB (2 tiếp tuyến cắt nhau tại M) và OA = OB = R$\Rightarrow$OM là trung trực của AB $\Rightarrow OM \perp AB \Rightarrow IK \perp OM$. Gọi IK cắt OM tại H .Áp dụng định lý py ta go ta có cho các tam giác vuông $MHI; KHO; MHK, OHI$ ta có

$MI^2 = MH^2 + HI^2; KO^2 = KH^2 + HO^2; MK^2 = MH^2 + HK^2; OI^2 = KH^2 + HO^2$ suy ra

$MI^2 + KO^2 = MK^2 + IO^2 \Rightarrow KO^2 - KM^2 = IO^2 - MI^2 = IO^2 - IA^2 = OA^2 = R^2$ (vì IM = IA)

Vậy : $KO^2 - KM^2 = R^2$

b) Nối KO cắt đường tròn tại Q, P.Ta có KM = KC

Suyra $KO^2 - KM^2 = R^2 \Leftrightarrow KO^2 - KC^2 = R^2 \Rightarrow$

$KC^2 = KO^2 - OP^2 = (KO + OP)(KO - OP) = KQ.KP$

Ta lại có KQ.KP =

KD.KA $\Rightarrow KC^2 = KD.KA \Rightarrow \Delta CKD \backsim \Delta AKD(c.g,c) \Rightarrow \widehat{DCK} = \widehat{KAC} = \widehat{DBM}$

Vậy tứ giác MDCB nội tiếp.

c) Gọi L là trung điểm của KD ta có $\widehat{AEM} = \widehat{MAK} = \widehat{EMK}$ vì $\Delta MKD \backsim \Delta AKM(c.g.c)$

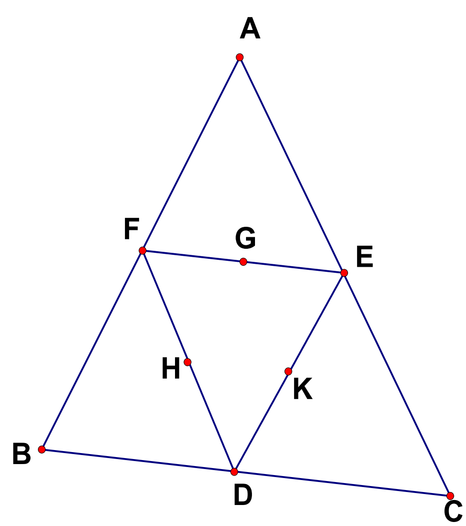
$\Rightarrow$AE//KM

Mặt khác ta có $KF.KE = KD.KA \Rightarrow KF.KN = KL.KA \Rightarrow ANFL$ nội tiếp

Suy ra $\widehat{LAF} = \widehat{LNF} = \widehat{MEK} = \widehat{FMK}$ (vì $KF.KE = KD.KA = KC^2 = KM^2$) hay

$\widehat{KAF} = \widehat{KMF} \Rightarrow tugiacMKFA$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AFN} = \widehat{AMK} = \widehat{AIN} \Rightarrow I, A, N.F$ cùng thuộc một đường tròn

<u>Câu 5</u>. (1.0 điểm)



Ta thấy có 2 số la 9 và 8 trong dãy 1,2,3,4,..,9 tổng 2 số với 1 bằng 18 ta thấy tại điểm A (tương tự B,C) không thể điền số 1 vì nếu trái lại thì B,F phải điền cặp 8,9 ;tại C,E điền cặp 8,9

Điều này vô lí .Tương tự tại D,E,F cũng không thể điền số 1 vậy số 1 được điền tại H, G,K

Xét trường hợp số 1 được điền tại G (tương tự tại H,K) khi đó E điền số 8 ,F điền số 9 (hoặc ngược lại).Giả sử tại A điền a;C điền c, D điền d, K điền k ,tại H điền k+1, tại B điền c +1. khi đó a,d;c; c+1,k,k+1 phân biệt thuộc $\{2,3,4,5,6,7\}$

Khi đó

$$\begin{cases} a + c = 9 \\ d + k = 9 \\ d + 2c = 17 \end{cases} \Rightarrow d \in \{3;5;7\} \; thu \; d = 7(thoa \; man)$$

Vậy a=4;c=5;k=2 có 3.2=6 (cách)