

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NỘI
CỤM CÁC TRƯỜNG THPT

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI OLYMPIC CHỌN HỌC SINH GIỎI
LỚP 11 CẤP CỤM TRƯỜNG THPT
NĂM HỌC 2022 – 2023

Môn thi: TOÁN

Ngày thi: 15 tháng 03 năm 2023

Thời gian làm bài: 150 phút

Họ và tên thí sinh:.....

Số báo danh:.....

Bài 1 (5,0 điểm)

1) Giải các phương trình sau :

a) $(2\sin x - \cos x)(1 + \cos x) = \sin^2 x$;

b) $\frac{\cos 2x}{\sin x} + \frac{\sin 2x}{\cos x} = \tan x - \cot x$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + 3\sqrt{xy + x - y^2} - y = 5y + 4 \\ \sqrt{4y^2 - x - 2} + \sqrt{y - 1} = x - 1 \end{cases}$.

Bài 2 (3,0 điểm)

1) Tìm số tự nhiên x thỏa mãn $C_{x+1}^1 + 3C_{x+2}^2 = C_{x+1}^3$.

2) Tìm hệ số của x^8 trong khai triển $\left(x^2 + \frac{5}{x}\right)^{22}$ (với $x \neq 0$).

3) Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên có sáu chữ số đôi một khác nhau tạo thành từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 sao cho hai chữ số 2 và 3 đứng cạnh nhau.

Bài 3 (4,0 điểm)

1) Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_1 + 2u_3 = 6 \\ 3u_2 - u_5 = -7 \end{cases}$. Tính u_{20} .

2) Cho dãy số (u_n) được xác định như sau: $u_1 = \frac{1}{3}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{(2n+3)u_n + 1}$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

Chứng minh $u_1 + u_2 + \dots + u_n < \frac{3}{4}$.

Bài 4 (2,0 điểm) Tính $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt[3]{3x+1}}{x^2}$.

Bài 5 (6,0 điểm) Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$, độ dài cạnh đáy là a và đường cao $SO = 2a$. Gọi H là trung điểm của BC , M là điểm thuộc đoạn thẳng OH ($M \neq O; M \neq H$).

1) Tính cosin góc giữa \overline{AH} và \overline{SB} .

2) Gọi (α) là mặt phẳng qua M và vuông góc với AH . Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABC$ cắt bởi (α) .

3) Tính tỷ số $\frac{AM}{AH}$ khi diện tích thiết diện của mặt phẳng (α) cắt hình chóp $S.ABC$ đạt giá trị lớn nhất.

----- Hết -----

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Chữ kí cán bộ coi thi số 1:

Chữ kí cán bộ coi thi số 2: