UBND HUYỆN MỘC CHÂU
TRƯỜNG TH&THCS TÂY TIẾN

CỘNG HÒA XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM
Độc lập – Tự do – Hạnh phúc

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP THCS NĂM HỌC 2023 - 2024
CỤM CÁC TRƯỜNG TRÊN ĐỊA BÀN THỊ TRẤN MỘC CHÂU
Môn Thi: TOÁN. Ngày thi: 16.11.2023
(Thời gian 150 phút không kể thời gian giao đề)
(Đề gồm 01 trang)

Bài 1.(5 điểm)

1) Cho biểu thức: $P=\dfrac{x}{x-\sqrt{x}}+\dfrac{2}{x+2\sqrt{x}}+\dfrac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+2\sqrt{x})}$

a) Rút gọn P.

b) Tính P khi $x=3+2\sqrt{2}$.

c) Tìm giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên.

2) Cho hàm số y = mx - 2m -1 (m $\neq$ 0)

a) Chứng minh rằng đồ thị hàm số luôn đi qua một điểm cố định.

b) Gọi A, B lần lượt là giao điểm của đồ thị hàm số với các trục Ox , Oy. Xác định m để diện tích tam giác AOB bằng 4 (đvdt)

Bài 2.(3 điểm)

a) Tìm các số nguyên $x;y$ thỏa mãn: $y^2 + 2xy - 3x - 2 = 0$

b) Tìm số tự nhiên n sao cho $n^2 + 2n + 12$ là số chính phương

Bài 3.(4 điểm)

a) Giải phương trình**:** $x^2 + 2022x - 2021 = 2\sqrt{2024x - 2023}$

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+y+z=\sqrt{6} \\ x^3+y^3+z^3=3xyz \end{cases}$

Bài 4. (6 điểm)

Cho AB là đường kính của đường tròn (O; R). C là một điểm thay đổi trên đường tròn (C khác A và B), kẻ CH vuông góc với AB tại H. Gọi I là trung điểm của AC, OI cắt tiếp tuyến tại A của đường tròn (O; R) tại M.

a) Chứng minh 4 điểm C, H, O, I cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh MC là tiếp tuyến của (O; R).

c) Xác định vị trí của C để chu vi tam giác ACB đạt giá trị lớn nhất? Tìm giá trị lớn nhất đó theo R.

Bài 5.(2 điểm)

Cho x, y, z > 0 thoả mãn x + y + z = 2

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P = $\dfrac{x^2}{y+z}+\dfrac{y^2}{z+x}+\dfrac{z^2}{x+y}$

-------------------Hết-----------------

UBND HUYỆN MỘC CHÂU
TRƯỜNG TH&THCS TÂY TIẾN

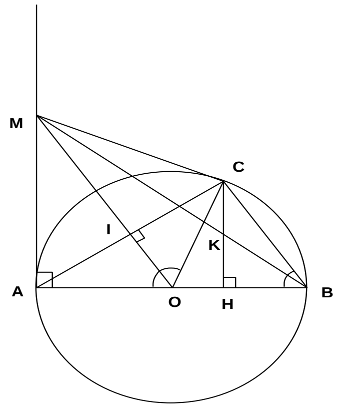
CỘNG HÒA XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM
Độc lập – Tự do – Hạnh phúc

HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN
KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP THCS NĂM HỌC 2023 - 2024
CỤM CÁC TRƯỜNG TRÊN ĐỊA BÀN THỊ TRẤN MỘC CHÂU
(Gồm 5 trang)

Bài	Nội dung	Điểm
1 (5đ)	1. a) Với $x > 0;\ x \neq 1$, ta có: $P = \dfrac{x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} + \dfrac{2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} + \dfrac{x+2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}$	0,25
	$= \dfrac{x(\sqrt{x}+2)+2(\sqrt{x}-1)+x+2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \dfrac{x\sqrt{x}+2x+2\sqrt{x}-2+x+2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}$	0,25
	$= \dfrac{x\sqrt{x}+2x+2\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$	0,5
	1.b) $x = 3+2\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{2+2\sqrt{2}+1} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} = \sqrt{2}+1$	0,5
	$P = \dfrac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)} = \dfrac{\sqrt{2}+1+1}{\sqrt{2}+1-1} = \dfrac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}$	0,5
	1.c) ĐK: $x > 0; x \neq 1$: $P = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \dfrac{\sqrt{x}-1+2}{\sqrt{x}-1} = 1+\dfrac{2}{\sqrt{x}-1}$	0,25
	Để P nhận giá trị nguyên thì $\sqrt{x}-1$ là ước của 2. Ư(2)={-1; 1; -2; 2}	0,25
	Nếu $\sqrt{x}-1 = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4$ (TM) Nếu $\sqrt{x}-1 = -1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (KTM) Nếu $\sqrt{x}-1 = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9$ (TM) Nếu $\sqrt{x}-1 = -2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = -1$(Vô lí)	0,25
	Vậy với $x=4$ hoặc $x=9$ thì P nhận giá trị nguyên	0,25
	2.a) Giả sử đồ thị hàm số đi qua điểm M(x_0, y_0) với mọi m. Ta có: y_0 = mx_0- 2m - 1 với mọi m $\Leftrightarrow$ mx_0- 2m - 1 - y_0 = 0 với mọi m	

	$\Leftrightarrow$ m (x_0 - 2) - (y_0 + 1) = 0 với mọi m $\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - 2 = 0 \\ y_0 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = -1 \end{cases}$ Vậy đồ thị hàm số đi qua điểm cố định M (2 ; -1) 2.b) Đồ thị hàm số cắt hai trục Ox và Oy khi m$\neq$ 0 và - 2m - 1$\neq$0 Hay m$\neq$ 0 và m $\neq \frac{-1}{2}$ A là giao điểm của đồ thị với trục Ox ta có y = 0 thay vào hàm số ta được x = $\frac{2m+1}{m}$ B là giao điểm của đồ thị với trục Oy ta có x = 0 thay vào hàm số ta được y = -2m - 1 Vậy A ($\frac{2m+1}{m}$; 0) ; B (0; -2m-1) Diện tích tam giác là : S = $\frac{1}{2}$ OA . OB $=\frac{1}{2}\left\|\frac{2m+1}{m}\right\| . \|-2m-1\| = \frac{(2m+1)^2}{2\|m\|}$ Mà S = 4 $\Leftrightarrow$ (2m + 1)^2 = 8$\|m\|$ +) Nếu m > 0, ta có phương trình: 4m^2 + 4m + 1 = 8m $\Leftrightarrow$(2m - 1)^2 = 0$\Leftrightarrow$ 2m - 1 = 0$\Leftrightarrow$m = $\frac{1}{2}$(TM) +) Nếu m < 0, ta có phương trình: 4m^2 + 4m + 1 = - 8m $\Leftrightarrow 4m^2 + 12m + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \frac{-3+2\sqrt{2}}{2} \text{ (TM)} \\ m = \frac{-3-2\sqrt{2}}{2} \text{ (TM)} \end{array}\right.$ Vậy m $\in$ { $\frac{1}{2}; \frac{-3+2\sqrt{2}}{2}; \frac{-3-2\sqrt{2}}{2}$ }	0,5 0,5 0,5 0,5
2 (3đ)	a) $y^2 + 2xy - 3x - 2 = 0$ $\Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + 3x + 2$ $\Leftrightarrow (x+y)^2 = (x+1)(x+2)\ (*)$ VT của (*) là số chính phương; VP của (*) là tích của 2 số nguyên liên tiếp nên phải có 1 số bằng 0.$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ x+2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \Rightarrow y=1 \\ x=-2 \Rightarrow y=2 \end{array}\right.$ Vậy có 2 cặp số nguyên $(x;y)=(-1;1)$ hoặc $(x;y)=(-2;2)$ thỏa mãn b) Vì n^2 + 2n + 12 là số chính phương nên đặt n^2 + 2n + 12 = k^2 (k $\in$ N) $\Rightarrow$ (n^2 + 2n + 1) + 11 = k^2 $\Leftrightarrow$ k^2 - (n+1)^2 = 11	0,5 0,5 0,5

<table>
<tr>
<td></td>
<td>$\Leftrightarrow$ (k + n + 1) (k - n - 1) = 11
Nhận thấy k + n + 1 > k - n - 1 và chúng là những số nguyên dương, nên ta có thể viết (k + n + 1) (k - n - 1) = 11.1
$\Leftrightarrow \begin{cases} k+n+1=11 \\ k-n-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=6 \\ n=4\ (TM) \end{cases}$
Vậy với n = 4 thì $n^2 + 2n + 12$ là số chính phương</td>
<td>0,5
0,5
0,5</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">3
(4đ)</td>
<td>a) Giải phương trình: $x^2 + 2022x - 2021 = 2\sqrt{2024x - 2023}$
ĐK: $x \geq \frac{2023}{2024}$
$x^2 + 2022x - 2021 = 2\sqrt{2024x - 2023}$
$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + 2024x - 2023 - 2\sqrt{2024x - 2023} + 1 = 0$
$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (\sqrt{2024x - 2023} - 1)^2 = 0$
Do $(x - 1)^2 \geq 0$ và $(\sqrt{2024x - 2023} - 1)^2 \geq 0$ với mọi $x \geq \frac{2023}{2024}$ nên:
$\begin{cases} x-1=0 \\ \sqrt{2024x-2023}-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \sqrt{2024x-2023}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 2024x-2023=1 \end{cases}$
$\Leftrightarrow x=1$ (thỏa mãn điều kiện).
Vậy $x=1$ là nghiệm của phương trình đã cho.</td>
<td>0,25
0,25
0,5
0,5
0,5</td>
</tr>
<tr>
<td>b) $\begin{cases} x+y+z=\sqrt{6} & (1) \\ x^3+y^3+z^3=3xyz & (2) \end{cases}$
(2) $\Leftrightarrow (x^3+y^3)+z^3-3xyz=0$
$\Leftrightarrow (x+y)^3-3x^2y-3xy^2+z^3-3xyz=0$
$\Leftrightarrow [(x+y)^3+z^3]-3x^2y-3xy^2-3xyz=0$
$\Leftrightarrow (x+y+z)[(x+y)^2-(x+y).z+z^2]-(3x^2y+3xy^2+3xyz)=0$
$\Leftrightarrow (x+y+z)(x^2+2xy+y^2-xz-yz+z^2)-3xy(x+y+z)=0$
$\Leftrightarrow (x+y+z)(x^2+2xy+y^2-xz-yz+z^2-3xy)=0$
$\Leftrightarrow (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)=0$ (3)
Kết hợp (3) với (1): x + y + z = $\sqrt{6}$, ta có:
$(x^2+y^2+z^2-xz-yz-xy)=0$
$\Leftrightarrow 2(x^2+y^2+z^2-xz-yz-xy)=0$
$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2xz-2yz=0$
$\Leftrightarrow (x^2-2xy+y^2)+(y^2-2yz+z^2)+(z^2-2xz+x^2)=0$
$\Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0$</td>
<td>0,5
0,5</td>
</tr>
</table>

	$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-y)^2=0\\(y-z)^2=0\\(z-x)^2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-y=0\\y-z=0\\z-x=0\end{cases} \Leftrightarrow x=y=z\ (4)$ Kết hợp (4) và (1): $x + y + z = \sqrt{6}$, ta có: $x = y = z = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là: $\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}; \dfrac{\sqrt{6}}{3}; \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$	0,5 0,5
		0,5
4 (6đ)	a) Ta có $OI \perp AC$ (*Đường kính đi qua trung điểm của dây cung*), $CH \perp AB$ (*gt*). Suy ra: $\widehat{CIO} = \widehat{CHO} = 90^0$ vậy tứ giác CIOH là tứ giác nội tiếp, suy ra C, I, O, H cùng thuộc một đường tròn. b) Xét Δ AOM và Δ COM có: OA = OC = R OM là cạnh chung $\widehat{AOM} = \widehat{COM}$ (Vì ΔOCM cân tại O nên đường trung tuyến OI đồng thời là đường phân giác) $\Rightarrow \Delta$ AOM = Δ COM (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{MCO} = \widehat{MAO} = 90^0$ $\Rightarrow MC \perp CO \Rightarrow$ MC là tiếp tuyến của (O; R). c) Chu vi tam giác ACB là $P_{ACB} = AB + AC + CB = 2R + AC + CB$ Ta lại có: $(AC - CB)^2 \ge 0 \Rightarrow AC^2 + CB^2 \ge 2AC.CB \Rightarrow 2AC^2 + 2CB^2 \ge AC^2 + CB^2 + 2AC.CB$ $2(AC^2 + CB^2) \ge (AC + CB)^2 \Rightarrow AC + CB \le \sqrt{2(AC^2 + CB^2)} \Rightarrow AC + CB \le \sqrt{2AB^2}$ (Pitago) $\Rightarrow AC + CB \le \sqrt{2.4R^2} \Rightarrow AC + CB \le 2R\sqrt{2}$. Đẳng thức xảy ra khi AC = CB $\Leftrightarrow$ C là điểm chính giữa cung AB. Suy ra $P_{ACB} \le 2R + 2R\sqrt{2} = 2R(1 + \sqrt{2})$, dấu "=" xảy ra khi C là điểm chính giữa cung AB Vậy max $P_{ACB} = 2R(1 + \sqrt{2})$ khi C là điểm chính giữa cung AB.	1,5 0,5 0,5 0,5 0,5 0,5 0,5 0,5 0,5

<table>
<tr>
<td>5
(2đ)</td>
<td>Vì x, y, z > 0 ta có:
Áp dụng BĐT Côsi đối với 2 số dương $\frac{x^2}{y+z}$ và $\frac{y+z}{4}$ ta được:
$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y+z}{4}\ge 2\sqrt{\frac{x^2}{y+z}.\frac{y+z}{4}}=2.\frac{x}{2}=x$ (1) .
Tương tự ta có:
$\frac{y^2}{x+z}+\frac{x+z}{4}\ge y(2)$
$\frac{z^2}{x+y}+\frac{x+y}{4}\ge z(3)$
Cộng (1), (2), (3) ta được:
$\left(\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\right)+\frac{x+y+z}{2}\ge x+y+z$
$\Leftrightarrow \frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\ge x+y+z-\frac{x+y+z}{2}$
$\Rightarrow P\ge (x+y+z)-\frac{x+y+z}{2}=2-\frac{2}{2}=2-1=1$
Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x=y=z=\frac{2}{3}$
Vậy GTNN của P là 1 $\Leftrightarrow x=y=z=\frac{2}{3}$</td>
<td>0,5
0,5
0,5
0,5</td>
</tr>
</table>