

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM. (8,0 điểm)

Hãy chọn phương án trả lời đúng rồi ghi vào tờ giấy thi.

Câu 1: Cho biểu thức $P = \frac{x}{\sqrt{xy} + y} + \frac{y}{\sqrt{xy} - x} - \frac{x+y}{\sqrt{xy}}$ với $x + y = 7$ và $xy = 10$. Khi đó

giá trị của biểu thức P là

- A. $P = \pm \frac{7}{3}$. B. $P = \frac{7}{3}$. C. $P = -\frac{7}{3}$. D. $P = \frac{1}{5}$.

Câu 2: Cho $A = \frac{x(\sqrt{x+4\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-4\sqrt{x-4}})}{\sqrt{x^2-8x+16}}$ với $x > 4$. Giá trị nhỏ nhất của biểu

thức A là

- A. 6. B. 7. C. 8. D. 9.

Câu 3: Gọi S là tổng các giá trị nguyên của x để biểu thức $N = \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 1}$ có giá trị

nguyên. Giá trị của S là

- A. $S = 36$. B. $S = 38$. C. $S = 41$. D. $S = 44$.

Câu 4: Các đường thẳng $y = -5(x + 1)$; $y = ax + 3$; $y = 3x + a$ đồng quy với giá trị của a là

- A. $a = 13$. B. $a = 3$. C. $a = -13$. D. $a \in \{-13; 3\}$.

Câu 5: Với giá trị nào của m thì đồ thị 2 hàm số $y = 2x + m + 3$ và $y = 3x + 5 - m$ cắt nhau tại 1 điểm nằm trên trục tung ?

- A. $m = 1$. B. $m = -1$. C. $m = 2$. D. $m = 3$.

Câu 6: Cho đường thẳng $mx + (2 - 3m)y + m - 1 = 0$ (d). Tìm m để khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng (d) là lớn nhất. Khi đó giá trị của m bằng

- A. $m = 12$. B. $m = -12$. C. $m = -\frac{1}{2}$. D. $m = \frac{1}{2}$.

Câu 7: Tổng các nghiệm của phương trình: $\sqrt{2x+9} = \sqrt{4-x} + \sqrt{3x+1}$ là

- A. 2. B. 3. C. -2. D. $\frac{11}{3}$.

Câu 8: Cho phương trình: $\sqrt{5x^3-1} + \sqrt[3]{2x-1} + x - 4 = 0$. Phương trình có số nghiệm là

- A. 1. B. 2. C. 12. D. 18.

Câu 9: Tam giác ABC vuông tại đỉnh A, $AC = 8$, $AB = \sqrt{192}$, $AH \perp BC$ ($H \in BC$). Khi đó tỉ số đồng dạng k của tam giác HAB và ACB là

- A. $k = \frac{1}{\sqrt{3}}$. B. $k = \sqrt{3}$. C. $k = \frac{2}{\sqrt{3}}$. D. $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 10: Cho tứ giác ABCD, hai đường chéo vuông góc tại O. Biết $AB = \frac{1}{2}CD$,

$AO = \frac{1}{3}AC$, $S_{AOB} = a^2$. Khi đó diện tích S của tứ giác ABCD là

- A. $S = 7a^2$. B. $S = 8a^2$. C. $9a^2$. D. $S = 10a^2$.

Câu 11: Cho tam giác cân ABC có $\hat{A} = 120^\circ$; $AB = AC$; $BC = 2$; $BH \perp AC$ ($H \in AC$). Độ dài HC nhận giá trị nào sau đây?

- A. $HC = 0,5$. B. $HC = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$. C. $HC = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$. D. $HC = \sqrt{3}$.

Câu 12: Cho tam giác ABC vuông tại B. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $CD = \frac{1}{3}CA$. Vẽ $DF \perp AB$ ($F \in AB$). Gọi E là trung điểm của DF. Đáp án nào đúng?

- A. $AC = 3BE$. B. $BD = 2CD$. C. $BE = \frac{1}{2}AC$. D. $BE = \frac{1}{4}AC$.

Câu 13: Cho tam giác ABC, vẽ hình bình hành AMON sao cho $M \in AB$, $O \in BC$, $N \in AC$. Biết $S_{MOB} = a^2$, $S_{NOC} = b^2$. Diện tích S của hình bình hành AMON bằng

- A. $S = ab$. B. $S = 2ab$. C. $S = \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$. D. $S = (a^2 + b^2)$.

Câu 14: Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính BC và điểm A nằm trên nửa đường tròn (A khác B, C). Hạ AH vuông góc với BC (H thuộc BC). Gọi I và K lần lượt đối xứng với H qua AB và AC. Diện tích tứ giác BIKC lớn nhất bằng

- A. R^2 . B. $2R^2$. C. $3R^2$. D. $4R^2$.

Câu 15: Cho điểm C thuộc nửa đường tròn đường kính AB, H là hình chiếu của C trên AB. Các điểm D và E thuộc nửa đường tròn sao cho HC là tia phân giác của góc DHE. Hệ thức nào sau đây đúng?

- A. $HE^2 = HC.HD$. B. $HC = \frac{HD+HE}{2}$. C. $HC^2 = HD.HE$. D. $HD^2 = HC.HE$.

Câu 16: Một người mang trứng gà ra chợ bán. Tổng số trứng gà bán ra được tính như sau: Ngày thứ nhất bán được 8 trứng và $\frac{1}{8}$ số trứng còn lại. Ngày thứ hai bán được 16

trứng và $\frac{1}{8}$ số trứng còn lại. Ngày thứ ba bán được 24 trứng và $\frac{1}{8}$ số trứng còn lại. Cứ như vậy cho đến ngày cuối cùng thì bán hết trứng. Biết số trứng gà bán được mỗi ngày đều bằng nhau. Số ngày người đó bán hết số trứng gà là

- A. 5. B. 7. C. 9. D. 11.

II. PHẦN TỰ LUẬN. (12,0 điểm)

Bài 1. (3,0 điểm)

- Chứng minh rằng $A = n^5 - n$ chia hết cho 10, với mọi số nguyên dương n .
- Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn phương trình $x^2 + xy - 2y - x - 5 = 0$.

Bài 2. (3,5 điểm)

- Giải phương trình $6x^3 - x^2 + x = \frac{1}{3}$.
- Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 12} + 5 = 3x + \sqrt{x^2 + 5}$.

Bài 3. (4,0 điểm)

Cho đường tròn $(O;R)$, DC là một dây cố định không đi qua O . Gọi S là điểm di động trên tia đối của tia DC (S không trùng D). Qua S kẻ hai tiếp tuyến SA, SB với đường tròn $(O;R)$, (A, B là hai tiếp điểm). Gọi I là trung điểm của DC .

- Chứng minh 5 điểm S, A, B, I, O cùng thuộc một đường tròn;
- Gọi H là giao điểm của SO và AB . Chứng minh: $SC \cdot SD = SH \cdot SO$;
- Chứng minh: $\widehat{DHC} = \widehat{DOC}$;
- Chứng minh đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định khi S di động.

Bài 4. (1,5 điểm)

- Cho a, b, c là ba số không âm có tổng bằng 1. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4(ab + bc + ac) - 1$$

- Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3xyz$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^2}{x^4 + yz} + \frac{y^2}{y^4 + zx} + \frac{z^2}{z^4 + xy}$$

-----HẾT-----

Họ và tên thí sinh:..... Số báo danh:.....

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm./.

HƯỚNG DẪN CHẤM
THI HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP HUYỆN 2023 - 2024

(Hướng dẫn chấm có 04 trang)

Lưu ý: Nếu học sinh làm cách khác, tổ chấm thống nhất cho điểm. Học sinh không vẽ hình hoặc vẽ sai không tính điểm.

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM (8,0 điểm). Mỗi câu trả lời đúng được 0,5 điểm

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8
	A	C	B	C	A	D	D	A
Câu	9	10	11	12	13	14	15	16
	D	C	D	A	B	B	C	B

II. PHẦN TỰ LUẬN (12,0 điểm).

Bài 1. (3,0 điểm)

- a) Chứng minh rằng $A = n^5 - n$ chia hết cho 10, với mọi số nguyên dương n .
b) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn phương trình $x^2 + xy - 2y - x - 5 = 0$.

Nội dung cần đạt	Điểm
a) $A = n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n - 1)(n + 1)(n^2 + 1)$	0,25
$n(n - 1) : 2 \Rightarrow A : 2 \quad (1)$	0,25
- Nếu $n : 5 \Rightarrow A : 5$. Với mọi số nguyên k ta xét - Nếu $n = 5k + 1 \Rightarrow (n - 1) : 5 \Rightarrow A : 5$	0,25
- Nếu $n = 5k + 2 \Rightarrow (n^2 + 1) = (5k + 2)^2 + 1 = 25k^2 + 20k + 5 : 5 \Rightarrow A : 5$ - Nếu $n = 5k + 3 \Rightarrow (n^2 + 1) = (5k + 3)^2 + 1 = 25k^2 + 30k + 10 : 5 \Rightarrow A : 5$	0,25
- Nếu $n = 5k + 4 \Rightarrow (n + 1) : 5 \Rightarrow A : 5$. Suy ra $A : 5, \forall n \in \mathbb{Z}^+ \quad (2)$	0,25
Từ (1), (2) và 2; 5 nguyên tố cùng nhau $\Rightarrow A = n^5 - n$ chia hết cho 10, với mọi số nguyên dương n .	0,25
b) Giả sử tồn tại x, y nguyên thỏa mãn $x^2 + xy - 2y - x - 5 = 0 \Leftrightarrow y(x - 2) = -x^2 + x + 5 \quad (*)$	0,25
Với $x = 2$ thì: $(*) \Leftrightarrow 0 = 3$ (Không thỏa mãn)	0,25
Với $x \neq 2$ ta có: $(*) \Leftrightarrow y = \frac{-x^2 + x + 5}{x - 2} = -x - 1 + \frac{3}{x - 2}$	0,25
Để y nguyên thì $x - 2$ là ước của 3 $\Rightarrow x - 2 \in \{-3; -1; 1; 3\} \Rightarrow x \in \{-1; 1; 3; 5\}$	0,25
Tương ứng với $y \in \{-1; -5; -1; -5\}$	0,25
Vậy phương trình có nghiệm nguyên $(x; y) = (-1; -1); (1; -5); (3; -1); (5; -5)$	0,25

Bài 2. (3,5 điểm)

a) Giải phương trình $6x^3 - x^2 + x = \frac{1}{3}$.

b) Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 12} + 5 = 3x + \sqrt{x^2 + 5}$

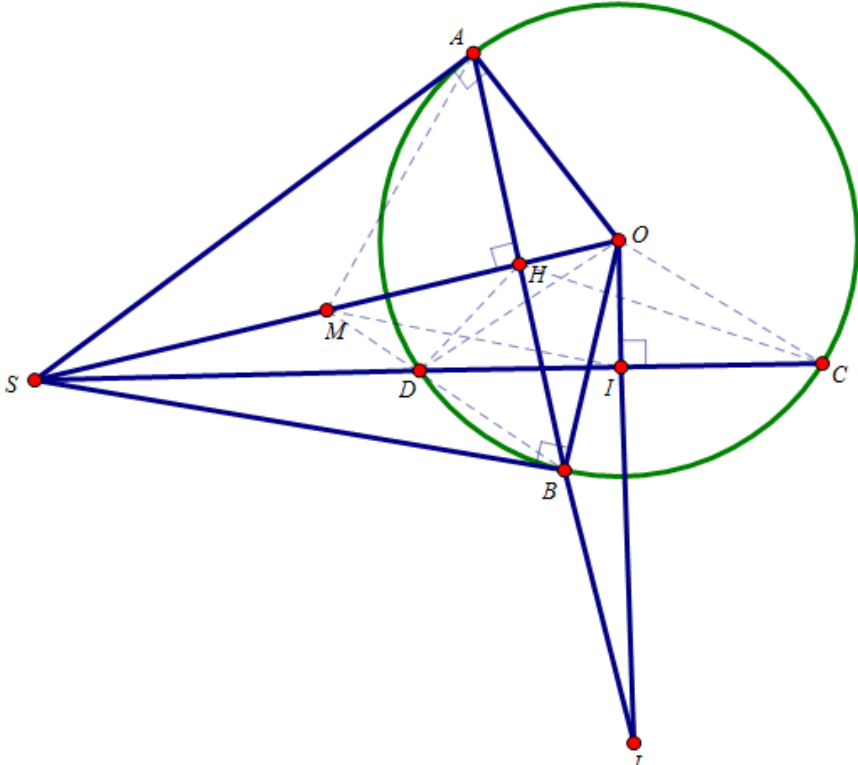
Nội dung cần đạt	Điểm
a) $6x^3 - x^2 + x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 17x^3 + (x - 1)^3 = 0$	0,5

$\Leftrightarrow 17x^3 = (1-x)^3 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{17x})^3 = (1-x)^3$	0,5
$\Leftrightarrow \sqrt[3]{17x} = 1-x \Leftrightarrow (\sqrt[3]{17} + 1)x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{17} + 1}$	0,25
Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{\sqrt[3]{17} + 1}$	0,25
b) PT viết lại thành $\sqrt{x^2 + 12} - \sqrt{x^2 + 5} = 3x - 5$	0,25
Vì $\sqrt{x^2 + 12} > \sqrt{x^2 + 5}$ nên để phương trình có nghiệm thì $3x - 5 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{5}{3}$	0,25
Ta nhận thấy $x = 2$ là nghiệm của phương trình, như vậy phương trình có thể phân tích về dạng $(x - 2)A(x) = 0$, để thực hiện được điều đó ta phải nhóm, tách như sau : $\sqrt{x^2 + 12} - 4 = 3x - 6 + \sqrt{x^2 + 5} - 3 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 + 12} + 4} = 3(x - 2) + \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 + 5} + 3}$ $\Leftrightarrow (x - 2) \left(\frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 12} + 4} - \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 5} + 3} - 3 \right) = 0 \quad (1)$	0,5
Ta thấy $\frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 12} + 4} - \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 5} + 3} = (x + 2) \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 12} + 4} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 5} + 3} \right) < 0$	0,25
Do $(x + 2) > 0$ với $x > \frac{5}{3}$ và $\frac{1}{\sqrt{x^2 + 12} + 4} < \frac{1}{\sqrt{x^2 + 5} + 3}$ vì $\sqrt{x^2 + 12} + 4 > \sqrt{x^2 + 5} + 3 > 0$	0,25
Suy ra $\frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 12} + 4} - \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 5} + 3} < 0 \Rightarrow \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 12} + 4} - \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 5} + 3} - 3 < 0$	0,25
Từ (1) suy ra $x = 2$ là nghiệm duy nhất của bài toán.	0,25

Bài 3. (4,0 điểm)

Cho đường tròn $(O;R)$, DC là một dây cố định không đi qua O. Gọi S là điểm di động trên tia đối của tia DC (S không trùng D). Qua S kẻ hai tiếp tuyến SA, SB với đường tròn $(O;R)$, (A,B là hai tiếp điểm). Gọi I là trung điểm của DC.

- Chứng minh 5 điểm S,A,B,I,O cùng thuộc một đường tròn;
- Gọi H là giao điểm của SO và AB. Chứng minh: $SC \cdot SD = SH \cdot SO$;
- Chứng minh: $\widehat{DHC} = \widehat{DOC}$;
- Chứng minh đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định khi S di động.

<p>Hình vẽ</p> 	
<p>a) (0,75 điểm) Vì SA, SB là các tiếp tuyến nên $SA \perp OA$, $SB \perp OB$, mặt khác I là trung điểm của CD nên, $OI \perp CD$.</p>	0,25
<p>Gọi M là trung điểm của SO. Khi đó ta có $MS = MO = MA = MI = MB$ (tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông). Suy ra 5 điểm S, A, B, I, O cùng thuộc một đường tròn (M).</p>	0,5
<p>b) (1,0 điểm)</p> <p>Xét hai $\triangle SDB$ và $\triangle SBC$ có $\begin{cases} \hat{S} \text{ chung} \\ \widehat{SBD} = \widehat{SCB} \end{cases}$ suy ra $\triangle SDB \sim \triangle SBC$ (g-g)</p>	0,5
<p>Suy ra $SB^2 = SD \cdot SC$ (1) Xét $\triangle SBO$ có $SB^2 = SH \cdot SO$ (2) Từ (1) và (2) $SD \cdot SC = SH \cdot SO \Leftrightarrow \frac{SC}{SH} = \frac{SO}{SD}$.</p>	0,5
<p>c) (1,0 điểm)</p> <p>Xét hai $\triangle SDH$ và $\triangle SOC$ có $\begin{cases} \hat{S} \text{ chung} \\ \frac{SC}{SH} = \frac{SO}{SD} \end{cases}$ suy ra $\triangle SDH \sim \triangle SOC$ (c-g-c)</p> <p>Suy ra $\widehat{SDH} = \widehat{SOC}$ (hai góc tương ứng).</p>	0,5
<p>Xét tứ giác DHOC có: $\widehat{HOC} + \widehat{HDC} = \widehat{SOC} + \widehat{HDC} = \widehat{SDH} + \widehat{HDC} = 180^\circ$ suy ra tứ giác DHOC nội tiếp. Suy ra $\widehat{DHC} = \widehat{DOC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung DC).</p>	0,5

d) (1,25 điểm). Gọi J là giao điểm của AB và OI. Xét hai ΔOIS và ΔOHJ có $\begin{cases} \widehat{OIS} = \widehat{OHJ} = 90^\circ \\ \widehat{O} \text{ chung} \end{cases}$	0,25
Suy ra $\Delta OIS \square \Delta OHJ$ (g-g) $\Rightarrow OI.OJ = OH.OS$	0,25
Mặt khác $OH.OS = OB^2 = R^2$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông SBO) Từ đó $OI.OJ = OH.OS = R^2 \Leftrightarrow OJ = \frac{R^2}{OI}$	0,5
Hệ thức này chứng tỏ J là điểm cố định. Hay đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định J khi S di động.	0,25

Bài 4. (1,5 điểm) a) Cho a, b, c là ba số không âm có tổng bằng 1. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4(ab + bc + ac) - 1$$

b) Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3xyz$. Tìm GTLN của

$$P = \frac{x^2}{x^4 + yz} + \frac{y^2}{y^4 + zx} + \frac{z^2}{z^4 + xy}$$

Nội dung cần đạt	Điểm
a) Ta có, a, b, c là ba số không âm có tổng bằng 1 $3(ab + bc + ac) \leq (a + b + c)^2 = 1 \Leftrightarrow 1 - 3(ab + bc + ac) \geq 0$ Khi đó $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4(ab + bc + ac) - 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 1 \geq 4(ab + bc + ca)$ $\Leftrightarrow (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + [1 - 3(ab + bc + ca)] \geq 0$	0,25
Theo trên $1 - 3(ab + bc + ac) \geq 0$, ta đi CM $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq 0$ Thật vậy, $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \geq 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$ Đẳng thức luôn đúng	0,25
b) Ta có $x, y, z > 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 3xyz \Rightarrow \frac{x^2 + y^2 + z^2}{xyz} \leq 3$.	0,25
Với $x, y, z > 0$, theo BĐT Cauchy ta được $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ $x^4 + yz \geq 2\sqrt{x^4 yz} = 2x^2 \sqrt{yz} \Rightarrow \frac{x^2}{x^4 + yz} \leq \frac{1}{2\sqrt{yz}}$	0,25
Tương tự ta được: $\frac{y^2}{y^4 + zx} \leq \frac{1}{2\sqrt{zx}}; \frac{z^2}{z^4 + xy} \leq \frac{1}{2\sqrt{xy}}$ $P = \frac{x^2}{x^4 + yz} + \frac{y^2}{y^4 + zx} + \frac{z^2}{z^4 + xy} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}} + \frac{1}{\sqrt{xy}} \right) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$	0,25
$\leq \frac{1}{2} \left(\frac{xy + yz + zx}{xyz} \right) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{xyz} \right) \leq \frac{3}{2}$. GTLN của $P = \frac{3}{2}$ khi $x = y = z = 1$	0,25

-----HẾT-----