SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO	**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THPT CẤP TỈNH**
HƯNG YÊN	**NĂM HỌC 2020 – 2021**
TOANMATH.com	**Môn thi: TOÁN**
Đề thi gồm 01 trang	*Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian phát đề)*

Câu I. *(6,0 điểm)*

1. Cho hàm số $y = g(x) = x^2 + (m+1)x + 1$ (m là tham số thực). Tìm m để đồ thị (C) của hàm số $y = f(x) = x^3 + (m-1)x^2 + (1-m)x - 1$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $g^2(x_1) + g^2(x_2) + g^2(x_3) = 15$.

2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 9 - x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = f(x^2 + 2x) + (m^2 - 1)\left(\ln x - \dfrac{1}{x}\right)$ nghịch biến trên nửa khoảng $[1; +\infty)$.

Câu II. *(4,0 điểm)*

1. Giải phương trình $9^x + (x^2 - 2x - 1).3^x - 2x^3 - x^2 = 0$ $(x \in \mathbb{R})$.

2. Cho các số thực *a*, *b* thỏa mãn $\log_{a^2+b^2+20}(6a + 8b - 4) = 1$ và các số thực dương *c*, *d* thỏa mãn $(c+d)\log_3(2c+d) + 2c^2 + 3cd + d^2 - 4c - 4d = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = (a - 2c)^2 + (b - d)^2$.

Câu III. *(5,0 điểm)*

1. Cho hình chóp *S.ABC* có $AB = AC = 2a$, $BC = a$, $SA = 3a$ $(a > 0)$. Tính thể tích khối chóp *S.ABC* theo *a* biết $\widehat{SAB} = \widehat{SAC} = 60^\circ$.

2. Cho điểm *A* nằm trên mặt cầu (S) tâm *O*, bán kính $R = 9$ cm. Gọi *I*, *K* là hai điểm trên đoạn *OA* sao cho $OI = IK = KA$. Các mặt phẳng lần lượt đi qua *I*, *K* cùng vuông góc với *OA* và cắt mặt cầu (S) theo đường tròn (C_1), (C_2). Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích khối nón đỉnh *O*, đáy là đường tròn (C_1), (C_2). Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

3. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại *A*, $AB = AC = a$ $(a > 0)$, biết $B'A = B'B = B'C$; góc giữa hai mặt phẳng $(BCC'B')$ và $(ABB'A')$ bằng φ với $\tan\varphi = \dfrac{5}{2\sqrt{2}}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'C'$ và $B'C$.

Câu IV. *(1,0 điểm)*

Tìm nguyên hàm $I = \int \frac{xdx}{2x^2 - 3x + 1}$.

Câu V. *(2,0 điểm)*

Cho dãy số (a_n) xác định như sau: $\begin{cases} a_1 = 2 \\ 2021a_{n+1} = a_n^2 + 2023a_n + 1, n \geq 1 \end{cases}$.

Tính: $L = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{a_1 + 1}{a_2 + 1} + \frac{a_2 + 1}{a_3 + 1} + \frac{a_3 + 1}{a_4 + 1} + \ldots + \frac{a_n + 1}{a_{n+1} + 1} \right)$.

Câu VI. *(2,0 điểm)*

Gọi *S* là tập các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau lập từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập *S*. Tính xác suất để số được chọn chia hết cho 3.

-------------------- HẾT --------------------

Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: . . . . Số báo danh: . . . .

Chữ ký của cán bộ coi thi: . . . .

NHÓM TOÁN VDC&HSG THPT

HỌC HỎI - CHIA SẺ KIẾN THỨC

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI - HƯNG YÊN
NĂM HỌC 2020 – 2021

Môn: Toán 12

Thời gian: 90 phút (Không kể thời gian phát đề)

LINK NHÓM: https://www.facebook.com/groups/1916660125164699

Câu 1. (6,0 điểm)

1. Cho hàm số $y=g\left(x\right)=x^2+\left(m+1\right)x+1$ (m là tham số thực). Tìm m để đồ thị $\left(C\right)$ của hàm số $y=f\left(x\right)=x^3+\left(m-1\right)x^2+\left(1-m\right)x-1$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $g^2\left(x_1\right)+g^2\left(x_2\right)+g^2\left(x_3\right)=15$.

2. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=9-x^2,\forall x\in\mathbb{R}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=f\left(x^2+2x\right)+\left(m^2-1\right)\left(\ln x-\dfrac{1}{x}\right)$ nghịch biến trên nửa khoảng $\left[1;+\infty\right)$.

Câu 2. (4,0 điểm)

1. Giải phương trình $9^x+\left(x^2-2x-1\right).3^x-2x^3-x^2=0$.

2. Cho các số thực a,b thỏa mãn $\log_{a^2+b^2+20}\left(6a+8b-4\right)=1$ và các số thực dương c,d thỏa mãn $\left(c+d\right)\log_3\left(2c+d\right)+2c^2+3cd+d^2-4c-4d=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\left(a-2c\right)^2+\left(b-d\right)^2$.

Câu 3. (5,0 điểm)

1. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB=AC=2a,\ BC=a,\ SA=3a$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a biết $\widehat{SAB}=\widehat{SAC}=60°$.

2. Cho điểm A nằm trên mặt cầu $\left(S\right)$ tâm O bán kính $R=9\left(cm\right)$. Gọi I,K là hai điểm trên đoạn OA sao cho $OI=IK=KA$. Các mặt phẳng lần lượt đi qua I,K cùng vuông góc với OA và cắt mặt cầu $\left(S\right)$ theo đường tròn $\left(C_1\right),\left(C_2\right)$. Gọi V_1,V_2 lần lượt là thể tích khối nón đỉnh O, đáy là đường tròn $\left(C_1\right),\left(C_2\right)$. Tính tỉ số $\dfrac{V_1}{V_2}$.

3. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB=AC=a$ $(a>0)$, biết $B'A=B'B=B'C$; góc giữa hai mặt phẳng $\left(BCC'B'\right)$ và $\left(ABB'A'\right)$ bằng φ với $\tan\varphi=\dfrac{5}{2\sqrt{2}}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'C'$ và $B'C$.

Câu 4. (4,0 điểm)

Tìm nguyên hàm $I=\int\dfrac{xdx}{2x^2-3x+1}$.

Câu 5. (4,0 điểm)

Cho dãy số (a_n) xác định như sau $\begin{cases} a_1 = 2 \\ 2021a_{n+1} = a_n^2 + 2023a_n + 1, n \geq 1 \end{cases}$.

Tính $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{a_1 + 1}{a_2 + 1} + \dfrac{a_2 + 1}{a_3 + 1} + \ldots + \dfrac{a_n + 1}{a_{n+1} + 1} \right)$.

Câu 6. (2,0 điểm)

Gọi S là tập các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau lập từ các chữ số $1,2,3,4,5,6,7,8,9$. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S. Tính xác suất để số được chọn chia hết cho 3.

-----------------------***HẾT***-----------------------

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. (6,0 điểm)

1. Cho hàm số $y=g(x)=x^2+(m+1)x+1$ (m là tham số thực). Tìm m để đồ thị (C) của hàm số $y=f(x)=x^3+(m-1)x^2+(1-m)x-1$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $g^2(x_1)+g^2(x_2)+g^2(x_3)=15$.

2. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=9-x^2, \forall x\in\mathbb{R}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=f(x^2+2x)+(m^2-1)\left(\ln x-\frac{1}{x}\right)$ nghịch biến trên nửa khoảng $[1;+\infty)$.

Lời giải

1.

◆ Đồ thị hàm số $y=f(x)=x^3+(m-1)x^2+(1-m)x-1$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $x^3+(m-1)x^2+(1-m)x-1=0$ (1) có ba nghiệm phân biệt.

Ta có $(1)\Leftrightarrow(x-1)(x^2+mx+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x^2+mx+1=0\end{array}\right.$.

Do đó phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $x^2+mx+1=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow\begin{cases}m+2\neq0\\m^2-4>0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-2\\m>2\end{array}\right.$ (2).

◆ Khi đó, theo định lí Vi-et phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt là x_1, x_2 và $x_3=1$ thỏa mãn $\begin{cases}x_1+x_2=-m\\x_1x_2=1\end{cases}$ (3).

◆ Ta có: $g^2(x)=x^4+2(m+1)x^3+(m^2+2m+3)x^2+2(m+1)x+1$.

◆ Chia biểu thức $g^2(x)$ cho $f(x)$ ta được

$g^2(x)=[x+(m+3)].f(x)+(m+5)x^2+(m^2+4m)x+m+4$.

◆ Suy ra $g^2(x_1)=(m+5)x_1^2+(m^2+4m)x_1+m+4$

$g^2(x_2)=(m+5)x_2^2+(m^2+4m)x_2+m+4$

$g^2(x_3)=g^2(1)=(m+5).1+(m^2+4m).1+m+4=m^2+6m+9$.

◆ Do đó:

$g^2(x_1)+g^2(x_2)+g^2(x_3)=15\Leftrightarrow(m+5)(x_1^2+x_2^2)+(m^2+4m)(x_1+x_2)+m^2+8m+17=15$

$\Leftrightarrow(m+5)\left[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right]+(m^2+4m)(x_1+x_2)+m^2+8m+17=15$ (4).

◆ Thay (3) vào (4) và rút gọn, ta được $m^2+3m-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-4\end{array}\right.$. Kết hợp với điều kiện (2) ta được $m=-4$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

2.

◆ Xét hàm số $g(x)=f(x^2+2x)+(m^2-1)\left(\ln x-\frac{1}{x}\right)$ có

$g'(x)=\left(f\left(x^2+2x\right)\right)'+\left(m^2-1\right)\left(\ln x-\frac{1}{x}\right)'=(2x+2).f'\left(x^2+2x\right)+\left(m^2-1\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$

$=2(x+1).\left[9-\left(x^2+2x\right)^2\right]+\left(m^2-1\right).\frac{x+1}{x^2}$.

◆ Hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên nửa khoảng $[1;+\infty)$ khi và chỉ khi $g'(x)\le 0,\forall x\in[1;+\infty)$. Khi đó: $2(x+1).\left[9-\left(x^2+2x\right)^2\right]+\left(m^2-1\right).\frac{x+1}{x^2}\le 0,\ \forall x\in[1;+\infty)$

$\Leftrightarrow m^2-1\le 2x^2\left[\left(x^2+2x\right)^2-9\right],\forall x\in[1;+\infty)$ (*).

Xét hàm số $h(x)=2x^2\left[\left(x^2+2x\right)^2-9\right]$ trên nửa khoảng $[1;+\infty)$ có:

$h'(x)=4x\left[\left(x^2+2x\right)^2-9\right]+2x^2.2(2x+2).\left(x^2+2x\right)$

$h'(x)=4x(x-1)(x+3)\left(x^2+2x+3\right)+8x^3.(x+1).(x+2)>0,\forall x\in[1;+\infty)$.

Bảng biến thiên của hàm số $h(x)=2x^2\left[\left(x^2+2x\right)^2-9\right]$ trên nửa khoảng $[1;+\infty)$ như sau:

x	1	$+\infty$
$h'(x)$	+	
$h(x)$	0 ↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên: điều kiện (*) xảy ra khi $m^2-1\le 0\Leftrightarrow -1\le m\le 1$.

Vậy tất cả giá trị thực của tham số m thỏa mãn điều kiện đề bài là: $-1\le m\le 1$.

Câu 2. (4,0 điểm)

1. Giải phương trình $9^x+\left(x^2-2x-1\right).3^x-2x^3-x^2=0$.

2. Cho các số thực a,b thỏa mãn $\log_{a^2+b^2+20}(6a+8b-4)=1$ và các số thực dương c,d thỏa mãn $(c+d)\log_3(2c+d)+2c^2+3cd+d^2-4c-4d=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=(a-2c)^2+(b-d)^2$.

Lời giải

1.

◆ Đặt $t=3^x\ (t>0)$, phương trình đã cho trở thành:

$t^2+\left(x^2-2x-1\right).t-2x^3-x^2=0$ (*)

$\Delta=\left(x^2-2x-1\right)^2-4\left(-2x^3-x^2\right)$

$=x^4+4x^2+1-4x^3-2x^2+4x+8x^3+4x^2$

$=x^4+4x^3+6x^2+4x+1$

$=(x+1)^4$

$$(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{-\left(x^2-2x-1\right)-(x+1)^2}{2} \\ t=\dfrac{-\left(x^2-2x-1\right)+(x+1)^2}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x=\dfrac{-\left(x^2-2x-1\right)-\left(x^2+2x+1\right)}{2} \\ 3^x=\dfrac{-\left(x^2-2x-1\right)+\left(x^2+2x+1\right)}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 3^x=-x^2 & (1) \\ 3^x=2x+1 & (2) \end{array}\right.$$

- Phương trình (1) vô nghiệm vì $3^x>0$ và $-x^2\le 0\ \forall x\in\mathbb{R}$.
- Phương trình $(2) \Leftrightarrow 3^x-2x-1=0$.

Xét hàm số $y=3^x-2x-1$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$, đạo hàm $y'=3^x\ln 3-2$.

$y'=0 \Leftrightarrow 3^x=\dfrac{2}{\ln 3} \Leftrightarrow x=\log_3\dfrac{2}{\ln 3}$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số như sau:

x	$-\infty$		$\log_3\dfrac{2}{\ln 3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\approx -0,27$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình (2) có 2 nghiệm.

Dễ nhận thấy 2 nghiệm của phương trình (2) là: $x=0$ và $x=1$.

Vậy phương trình đã cho có đúng hai nghiệm là: $x=0$ và $x=1$.

2.

- Với điều kiện: $6a+8b-4>0$ (*) và $a^2+b^2+20>1$ nên:

$\log_{a^2+b^2+20}(6a+8b-4)=1 \Leftrightarrow 6a+8b-4=a^2+b^2+20 \Leftrightarrow (a-3)^2+(b-4)^2=1$.

Do đó: $M(a;b)$ bất kỳ thuộc đường tròn (C): $(x-3)^2+(y-4)^2=1$

Đường tròn (C) có tâm $I(3;4)$, bán kính $r=1$.

- Vì: $c+d>0$ nên:

$(c+d)\log_3(2c+d)+2c^2+3cd+d^2-4c-4d=0 \Leftrightarrow \log_3(2c+d)+(2c+d)-4=0$ (1)

Xét hàm số $f(t)=\log_3 t+t-4$ với $t>0$ có $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 3}+1>0$ với $t>0$

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty) \Rightarrow$ phương trình $f(t)=0$ có tối đa một nghiệm $t>0$.

Mặt khác ta có: $f(3)=0$. Vậy $t=3$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f(t)=0$.

Từ đó $(1) \Leftrightarrow 2c+d=3 \Leftrightarrow 2c+d-3=0$.

Do đó: $N(2c;d)$ là điểm bất kỳ thuộc đường thẳng $\Delta: x+y-3=0$.

◆ $T=(a-2c)^2+(b-d)^2=MN^2$. Suy ra: $\min T=\min MN^2$.

Xét: $d(I;\Delta)=\frac{|3+4-3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2\sqrt{2}>1 \Rightarrow \Delta$ nằm ngoài (C). Do đó: $MN \geq 2\sqrt{2}-r=2\sqrt{2}-1$.

Khi đó $\min MN=2\sqrt{2}-1$. Suy ra: $\min T=\left(2\sqrt{2}-1\right)^2=9-4\sqrt{2}$.

Giá trị $\min T$ đạt được khi: N là hình chiếu của I lên Δ và $M=IN\cap(C)$

\+ Gọi Δ' là đường thẳng đi qua I và vuông góc với Δ thì:

$\Delta': -1(x-3)+(y-4)=0 \Leftrightarrow \Delta': x-y+1=0$

Khi đó: $\Delta'\cap\Delta=N(1;2) \Rightarrow c=\frac{1}{2},\ d=2$

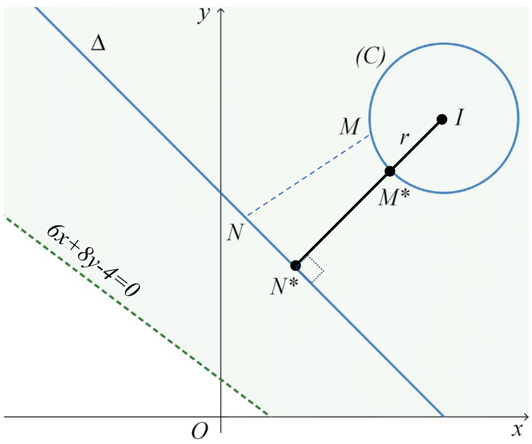
\+ $M=IN\cap(C)$ và $\overrightarrow{MN}=-\left(2\sqrt{2}-1\right).\overrightarrow{MI}$

Suy ra: $\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{ON}+\left(2\sqrt{2}-1\right).\overrightarrow{OI}}{1+\left(2\sqrt{2}-1\right)}=\left(\frac{6-\sqrt{2}}{2};\frac{8-\sqrt{2}}{2}\right)$

$\Rightarrow a=\frac{6-\sqrt{2}}{2},\ b=\frac{8-\sqrt{2}}{2}$ thỏa mãn điều kiện (*)

Vậy: $\min T=9-4\sqrt{2}$.

Minh họa bằng hình vẽ:



Câu 3. (5,0 điểm)

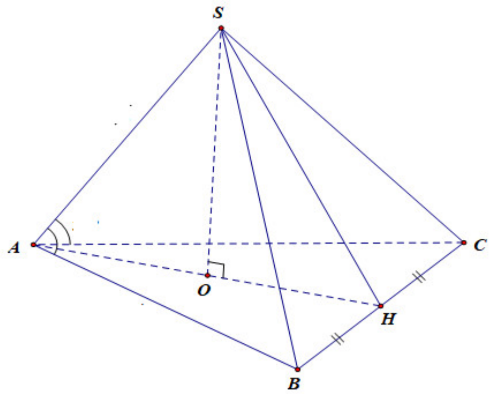
1. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB=AC=2a,\ BC=a,\ SA=3a$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ theo a biết $\widehat{SAB}=\widehat{SAC}=60°$.

2. Cho điểm A nằm trên mặt cầu (S) tâm O bán kính $R=9(cm)$. Gọi I,K là hai điểm trên đoạn OA sao cho $OI=IK=KA$. Các mặt phẳng lần lượt đi qua I,K cùng vuông góc với OA và cắt mặt cầu (S) theo đường tròn $(C_1),(C_2)$. Gọi V_1,V_2 lần lượt là thể tích khối nón đỉnh O, đáy là đường tròn $(C_1),(C_2)$. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

3. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A, $AB = AC = a$ ($a > 0$), biết $B'A = B'B = B'C$; góc giữa hai mặt phẳng $(BCC'B')$ và $(ABB'A')$ bằng φ với $\tan\varphi = \dfrac{5}{2\sqrt{2}}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'C'$ và $B'C$.

Lời giải

1.



◆ Gọi H là trung điểm BC, ta có $AB = AC$ nên $AH \perp BC$.

Ta có $\Delta SAB = \Delta SAC\ (c.g.c) \Rightarrow SB = SC$ nên $SH \perp BC$, suy ra $BC \perp (SAH)$.

◆ Do đó $(SAH) \perp (ABC)$. Trong mặt phẳng (SAH), kẻ $SO \perp AH$ tại O $\Rightarrow SO \perp (ABC)$.

◆ Trong ΔABC, $AH = \sqrt{AB^2 - HB^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{15}}{2}a$.

◆ Xét ΔSAB, ta có $SB^2 = SA^2 + AB^2 - 2SA.AB.\cos 60^o = 7a^2 \Rightarrow SB = a\sqrt{7} = SC$.

Có $SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}a$.

$S_{SAH} = \sqrt{p(p-SA)(p-SH)(p-AH)}, p = \dfrac{1}{2}(SA + AH + SH) = \dfrac{3\sqrt{11}}{4}a^2$.

$SO = \dfrac{2S_{SAH}}{AH} = \dfrac{\sqrt{165}}{5}a$.

◆ Vậy Thể tích khối chóp $S.ABC$ là: $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SO.S_{ABC} = \dfrac{1}{3}SO.\dfrac{1}{2}AH.BC = \dfrac{\sqrt{11}}{4}a^3$.

<u>Cách 2:</u>

Đặt $AS = m$, $AB = n$, $AC = p$, $\widehat{SAB} = \alpha$, $\widehat{SAC} = \beta$, $\widehat{BAC} = \gamma$.

◆ Sử dụng công thức tính nhanh: $V_{SABC} = \dfrac{1}{6}abc\sqrt{1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma}$

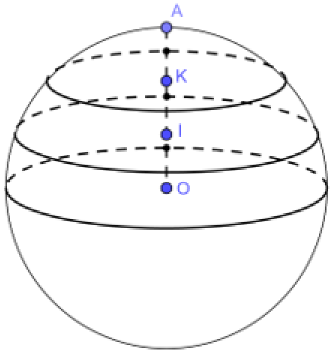
.

◆ Áp dụng : $m = 3a, n = p = 2a$, $\cos\alpha = \cos\beta = \cos 60° = \dfrac{1}{2}$.

$\cos\gamma = \cos\widehat{BAC} = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC} = \dfrac{7}{8}$.

◆ Ta có $V_{SABC} = \dfrac{1}{6}.3a.2a.2a.\sqrt{1 + 2.\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}.\dfrac{7}{8} - \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4} - \dfrac{49}{64}} = \dfrac{\sqrt{11}}{4}a^3$.

2.

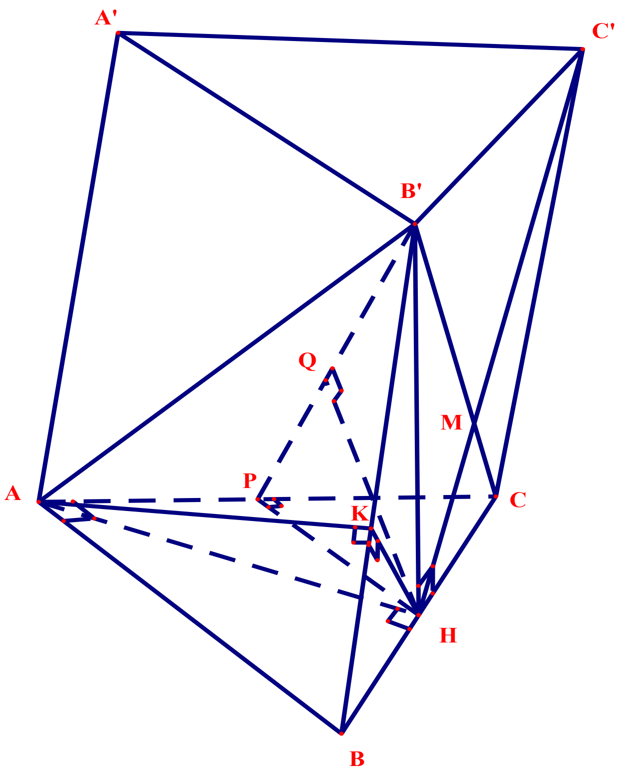


Từ giả thiết suy ra $OI = IK = KA = 3$.

Gọi r_1, r_2 lần lượt là bán kính của $(C_1),(C_2)$, ta có $r_1 = 6\sqrt{2}, r_2 = 3\sqrt{5}$.

Do đó $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{\frac{1}{3}\pi.r_1^2.OI}{\frac{1}{3}\pi.r_2^2.OK} = \dfrac{4}{5}$.

3.



◆ Gọi H là trung điểm của BC. Vì tam giác ABC vuông cân tại A nên:

$BH = CH = AH = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, suy ra H là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và $AH \perp BC$.

Mặt khác, theo giả thiết ta có $B'A = B'B = B'C$ nên $B'H \perp (ABC)$ $\Rightarrow (B'BC) \perp (ABC)$, $\Rightarrow (B'BC) \cap (ABC) = BC$ mà $AH \perp BC \Rightarrow AH \perp (B'BC)$.

◆ Do đó $AH \perp BB'$. Trong $(BCC'B')$ kẻ $HK \perp BB'$ $(K \in BB')$ nên $(AHK) \perp BB' \Rightarrow AK \perp BB'$. Do đó góc giữa hai mặt phẳng $(BCC'B')$ và $(ABB'A')$ là $\widehat{AKH} = \varphi$, vì $AH \perp (B'BC) \Rightarrow AH \perp HK$ nên ΔAHK vuông tại H.

◆ Xét tam giác AHK vuông tại H có: $HK=\dfrac{AH}{\tan\widehat{AKH}}=\dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{5}{2\sqrt{2}}}=\dfrac{2a}{5}$.

◆ Xét tam giác $B'HB$ vuông tại H có HK là đường cao nên

$$\frac{1}{HK^2}=\frac{1}{BH^2}+\frac{1}{B'H^2}\Rightarrow\frac{1}{B'H^2}=\frac{1}{HK^2}-\frac{1}{BH^2}\Rightarrow B'H=\frac{2a\sqrt{17}}{17}.$$

◆ Trong (ABC) kẻ $HP\perp AC$ $(P\in AC)$, mà $AC\perp B'H$, $(B'H\perp(ABC))$ nên $AC\perp(B'HP)$.

$\Rightarrow(ACB')\perp(B'HP)$, $(ACB')\cap(B'HP)=B'P$.

Trong $(B'HP)$ kẻ $HQ\perp B'P$, với $Q\in B'P$, do đó $HQ\perp(ACB')$ tại Q.

Do đó $HQ=\mathrm{d}(H,(ACB'))$.

◆ Trong tam giác $B'HP$ vuông tại H có $HP=\dfrac{a}{2}$ và HQ là đường cao nên

$$\frac{1}{HQ^2}=\frac{1}{PH^2}+\frac{1}{B'H^2}\Rightarrow HQ=\frac{2a\sqrt{33}}{33}.$$

◆ Ta có $A'C'\,//\,AC\Rightarrow A'C'\,//\,(ACB')\Rightarrow\mathrm{d}(A'C',B'C)=\mathrm{d}(A'C',(ACB'))=\mathrm{d}(C',(ACB'))$.

Gọi $M=B'C\cap C'H$; Vì $B'C'\,//\,HC$ nên ta có

$$\frac{C'M}{HM}=\frac{B'C'}{HC}=2\Rightarrow\frac{\mathrm{d}(C',(ACB'))}{\mathrm{d}(H,(ACB'))}=\frac{C'M}{HM}=2$$, vì $CH\cap(AB'C)=M$.

◆ Nên $\mathrm{d}(C',(ACB'))=2.\mathrm{d}(H,(ACB'))=2.HQ=2.\dfrac{2a\sqrt{33}}{33}=\dfrac{4a\sqrt{33}}{33}$.

◆ Vậy: $\mathrm{d}(A'C',B'C)=\dfrac{4a\sqrt{33}}{33}$.

Câu 4. (4,0 điểm)

1. Tìm nguyên hàm $I=\displaystyle\int\frac{x\mathrm{d}x}{2x^2-3x+1}$.

Lời giải

Ta có $I=\displaystyle\int\frac{x\mathrm{d}x}{(x-1)(2x-1)}=\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2x-1}\right)\mathrm{d}x=\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|2x-1|+C$.

Câu 5. (4,0 điểm)

Cho dãy số (a_n) xác định như sau $\begin{cases}a_1=2\\2021a_{n+1}=a_n^2+2023a_n+1,n\ge1\end{cases}$.

Tính $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_1+1}{a_2+1}+\frac{a_2+1}{a_3+1}+\ldots+\frac{a_n+1}{a_{n+1}+1}\right)$.

Lời giải

◆ Ta có :

$2021a_{n+1}=a_n^2+2023a_n+1\Leftrightarrow2021(a_{n+1}-a_n)=a_n^2+2a_n+1$

$\Leftrightarrow2021(a_{n+1}-a_n)=(a_n+1)^2\ge0,\forall n$ suy ra dãy số (a_n) tăng, suy ra $a_n\ge2,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

◆ Mặt khác ta có:

$2021a_{n+1}=a_n^2+2023a_n+1 \Leftrightarrow 2021(a_{n+1}+1)=(a_n+1)(a_n+2022) \Leftrightarrow \dfrac{a_n+1}{a_{n+1}+1}=\dfrac{2021}{a_n+2022}$.

◆ Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{a_1+1}{a_2+1}+\dfrac{a_2+1}{a_3+1}+\ldots+\dfrac{a_n+1}{a_{n+1}+1}\right)=2021\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{a_1+2022}+\dfrac{1}{a_2+2022}+\ldots+\dfrac{1}{a_n+2022}\right)$.

◆ Từ $2021(a_{n+1}+1)=(a_n+1)(a_n+2022) \Leftrightarrow \dfrac{1}{a_n+2022}=\dfrac{1}{a_n+1}-\dfrac{1}{a_{n+1}+1}$.

◆ Suy ra tổng

$$S_n=\frac{1}{a_1+2022}+\frac{1}{a_2+2022}+\ldots+\frac{1}{a_n+2022}$$

$$\Leftrightarrow S_n=\frac{1}{a_1+1}-\frac{1}{a_2+1}+\frac{1}{a_2+1}-\frac{1}{a_3+1}+\ldots+\frac{1}{a_n+1}-\frac{1}{a_{n+1}+1}$$

$$\Leftrightarrow S_n=\frac{1}{a_1+1}-\frac{1}{a_{n+1}+1} \Leftrightarrow S_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{a_{n+1}+1}.$$

Vì (a_n) là dãy tăng, ta xét:

◆ TH1: Dãy số (a_n) tăng và bị chặn trên. Giả sử $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=b$ với điều kiện $b\geq 2$.

Khi đó $2021b=b^2+2023b+1 \Leftrightarrow b^2+2b+1=0 \Leftrightarrow b=-1$ (không thỏa mãn điều kiện).

◆ TH2: Dãy số (a_n) tăng và không bị chặn trên. Khi đó $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=+\infty$ suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{a_{n+1}+1}=0$.

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\dfrac{1}{3}$.

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{a_1+1}{a_2+1}+\dfrac{a_2+1}{a_3+1}+\ldots+\dfrac{a_n+1}{a_{n+1}+1}\right)=\dfrac{2021}{3}$.

Câu 6. (2,0 điểm)

Gọi S là tập các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau lập từ các chữ số $1,2,3,4,5,6,7,8,9$. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S. Tính xác suất để số được chọn chia hết cho 3.

Lời giải

◆ Từ $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ ta lập được $A_9^4=3024$ số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau.

Suy ra số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega)=C_{3024}^1=3024$.

◆ Gọi A là biến cố: "Số được chọn chia hết cho 3".

◆ Các số tự nhiên từ 1 đến 9 chia thành 3 nhóm:

- Nhóm I gồm các số tự nhiên chia hết cho 3, gồm 3 số.
- Nhóm II gồm các số tự nhiên chia cho 3 dư 1, gồm 3 số.
- Nhóm III gồm các số tự nhiên chia cho 3 dư 2, gồm 3 số.

◆ Để chọn được số có 4 chữ số chia hết cho 3 khi và chỉ khi tổng 4 chữ số chia hết cho 3, ta có các trường hợp sau:

- 2 chữ số thuộc nhóm I, 1 chữ số thuộc nhóm II, 1 chữ số thuộc nhóm III có $4!.C_3^2.C_3^1.C_3^1$ cách.
- 1 chữ số thuộc nhóm I, 3 chữ số thuộc nhóm II có $4!.C_3^1.C_3^3$ cách.
- 1 chữ số thuộc nhóm I, 3 chữ số thuộc nhóm III có $4!.C_3^1.C_3^3$ cách.

- 2 chữ số thuộc nhóm II, 2 chữ số thuộc nhóm III có $4!.C_3^2.C_3^2$ cách.

Suy ra $n\left(A\right)=4!\left(C_3^2.C_3^1.C_3^1+C_3^1.C_3^3+C_3^1.C_3^3+C_3^2.C_3^2\right)=1008$.

- Vậy xác suất cần tìm là $P\left(A\right)=\dfrac{n\left(A\right)}{n\left(\Omega\right)}=\dfrac{1008}{3024}=\dfrac{1}{3}$.

------------------------***HẾT***------------------------