SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ TĨNH
ĐỀ CHÍNH THỨC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
LỚP 9 NĂM HỌC 2022 – 2023
MÔN TOÁN
Thời gian làm bài: 120 phút

Lời giải: **Nguyễn Ngọc Hùng – THCS Hoàng Xuân Hãn – Đức Thọ - Hà Tĩnh**

I- PHẦN GHI KẾT QUẢ *(Thí sinh chỉ cần ghi kết quả vào tờ giấy thi)*

Câu 1. Cho $x = 2+\sqrt{5}$. Tính giá trị của biểu thức $P = 5x^5 - 18x^4 - 10x^3 - 13x^2 + 3x + 4$

Gợi ý: Ta có $x = 2+\sqrt{5} \Leftrightarrow (x-2)^2 = \sqrt{5} \Leftrightarrow x^2 - 4x - 1 = 0$

Do đó $P = 5x^5 - 20x^4 - 5x^3 + 2x^4 - 8x^3 - 2x^2 + 3x^3 - 12x^2 - 3x + x^2 - 4x - 1 + 10x + 5$

$= 5x^3\left(x^2-4x-1\right) + 2x^2\left(x^2-4x-1\right) + 3x\left(x^2-4x-1\right) + \left(x^2-4x-1\right) + 10\left(2+\sqrt{5}\right) + 5$

$P = 25 + 10\sqrt{5}$

Câu 2. Cho biểu thức $C = \left(\dfrac{1}{1-\sqrt{x}} + \dfrac{2}{\sqrt{x}+1} - \dfrac{5-\sqrt{x}}{1-x}\right) : \dfrac{1-2\sqrt{x}}{x-1}$

Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để giá trị của biểu thức C là số nguyên.

Gợi ý: ĐKXĐ: $x \ge 0;\ x \ne 1;\ x \ne \dfrac{1}{4}$. Ta có $C = \dfrac{2}{1-2\sqrt{x}}$.

Để $C \in Z$ thì $1-2\sqrt{x} \in Ư(2) = \{-2;-1;1;2\} \Leftrightarrow x \in \{1;0\}$. Đối chiếu ĐKXĐ ta có $x = 0$.

Câu 3. Tính giá trị của biểu thức $A = \dfrac{\left(1^4+\frac{1}{4}\right)\left(3^4+\frac{1}{4}\right)\left(5^4+\frac{1}{4}\right)...\left(29^4+\frac{1}{4}\right)}{\left(2^4+\frac{1}{4}\right)\left(4^4+\frac{1}{4}\right)\left(6^4+\frac{1}{4}\right)...\left(30^4+\frac{1}{4}\right)}$

Gợi ý: Với $n \in N^*$, ta có $n^4 + \dfrac{1}{4} = n^4 + n^2 + \dfrac{1}{4} - n^2 = \left(n^2+\dfrac{1}{2}\right)^2 - n^2 = \left(n^2 - n + \dfrac{1}{2}\right)\left(n^2 + n + \dfrac{1}{2}\right)$

Lần lượt thay n = 1, 2, 3, …, 15. Ta có

$$A = \frac{\left(1^2-1+\frac{1}{2}\right)\left(1^2+1+\frac{1}{2}\right)\left(3^2-3+\frac{1}{2}\right)\left(3^2+3+\frac{1}{2}\right)...\left(29^2-29+\frac{1}{2}\right)\left(29^2+29+\frac{1}{2}\right)}{\left(2^2-2+\frac{1}{2}\right)\left(2^2+2+\frac{1}{2}\right)\left(4^2-4+\frac{1}{2}\right)\left(4^2+4+\frac{1}{2}\right)...\left(30^2-30+\frac{1}{2}\right)\left(30^2+30+\frac{1}{2}\right)}$$

Ta thấy $1^2+1+\dfrac{1}{2} = 2^2-2+\dfrac{1}{2};\ 2^2+2+\dfrac{1}{2} = 3^2-3+\dfrac{1}{2}, \ldots, 29^2+29+\dfrac{1}{2} = 30^2-30+\dfrac{1}{2}$

Do đó $A = \dfrac{1}{1861}$

Câu 4. Tìm số tự nhiên n để $B = n^2 + 4n + 2013$ là số chính phương.

Gợi ý: Đặt $n^2 + 4n + 2013 = a^2$ với $a \in Z$, ta có $a^2 - (n+2)^2 = 2009$

$\Leftrightarrow (|a| - |n+2|)(|a| + |n+2|) = 2009$. Vì $|a| + |n+2| > |a| - |n+2|$, ta có các trường hợp:

TH1. $\begin{cases} |a| + |n+2| = 2009 \\ |a| - |n+2| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow 2|n+2| = 2008 \Rightarrow n = 1002$

TH2. $\begin{cases} |a| + |n+2| = 287 \\ |a| - |n+2| = 7 \end{cases} \Leftrightarrow 2|n+2| = 280 \Rightarrow n = 138$

TH2. $\begin{cases} |a| + |n+2| = 49 \\ |a| - |n+2| = 41 \end{cases} \Leftrightarrow 2|n+2| = 8 \Rightarrow n = 2$

Vậy $n \in \{2; 138; 1002\}$ là các giá trị cần tìm.

Câu 5. Gọi M là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O trên đường thẳng $y = (m+2)x + m - 5$, với m là tham số. Khi OM đạt giá trị lớn nhất thì giá trị của m bằng bao nhiêu?

Gợi ý: Xét $m = -2 \Rightarrow y = -7$, khi đó $OM = 7$.

Xét $m \neq -2$. Gọi A, B là giao điểm của đường thẳng $y = (m+2)x + m - 5$ với trục Ox, Oy.

Tọa độ của $A\left(\frac{5-m}{m+2}; 0\right)$, $B(0; m-5)$, suy ra $OA = \left|\frac{5-m}{m+2}\right|$; $OB = |m-5|$.

Ta có $\frac{1}{OM^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \Rightarrow OM^2 = \frac{OA^2.OB^2}{OA^2 + OB^2} = \frac{m^2 - 10m + 25}{m^2 + 4m + 5} = \frac{-(7m+15)^2}{(m+2)^2 + 1} + 50 \leq 50$

$\Leftrightarrow OM \leq \sqrt{50}$. Vậy OM có giá trị lớn nhất bằng $\sqrt{50}$, khi đó $m = -\frac{15}{7}$

Câu 6. Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $a^3 - a^2b + ab^2 - 6b^3 = 0$.

Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{4a^4 - b^4}{4b^4 - a^4}$.

Gợi ý: Ta có $a^3 - a^2b + ab^2 - 6b^3 = 0 \Leftrightarrow a^3 - 2a^2b + a^2b - 2ab^2 + 3ab^2 - 6b^3 = 0$

$\Leftrightarrow (a - 2b)(a^2 - ab + 3b^2) = 0$. Vì $a^2 - ab + 3b^2 = \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{11b^2}{4} = 0 \Rightarrow a = b = 0$ (loại)

Vậy $a = 2b \Rightarrow P = \frac{-63}{12}$

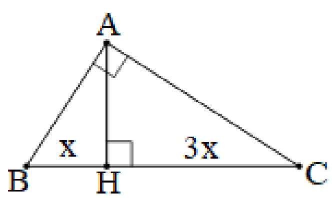
Câu 7. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết rằng $AH = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $BC = 4BH$

Tính diện tích tam giác ABC.

Gợi ý: Đặt BH = x, suy ra CH = 3x

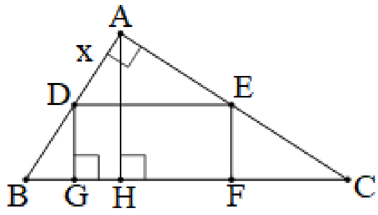
Ta có $BH.CH = AH^2 \Rightarrow 3x^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow BC = 4.\frac{1}{2} = 2 \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}AH.BC = \frac{\sqrt{3}}{2}$



Câu 8. Cho tam giác ABC vuông tại A có $4AB = 3AC$, $BC = 25$. Vẽ hình chữ nhật DEFG nội tiếp tam giác ABC sao cho D thuộc cạnh AB, E thuộc cạnh AC, F và G thuộc cạnh BC. Tính diện tích lớn nhất của hình chữ nhật DEFG.

Gợi ý: Kẻ đường cao AH.



Ta có $4AB = 3AC \Rightarrow \dfrac{AB}{3} = \dfrac{AC}{4} \Rightarrow \dfrac{AB^2}{9} = \dfrac{AC^2}{16}$

$= \dfrac{AB^2 + AC^2}{9+16} = \dfrac{BC^2}{25} = \dfrac{25^2}{25} = 25 \Rightarrow AB = 15;\ AC = 20$

Lại có $AH = \dfrac{AB.AC}{BC} = 12$. Đặt $AD = x \Rightarrow BD = 15 - x$

Do đó $\dfrac{DE}{BC} = \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{x}{15} \Rightarrow DE = \dfrac{5x}{3}$; $\dfrac{DG}{AH} = \dfrac{BD}{AB} = \dfrac{15-x}{15} \Rightarrow DG = \dfrac{4(15-x)}{5}$

Suy ra $S_{DEFG} = DE.DG = \dfrac{1}{3}.4x(15-x) \le \dfrac{1}{3}[x + 15 - x]^2 = 75$.

Vậy diện tích hình chữ nhật DEFG đạt giá trị lớn nhất bằng 75

Câu 9. Cho a, b không âm thỏa mãn $2a + b \le 4$, $2a + 3b \le 6$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 - 2a - b$

Gợi ý: Ta có $2a + b \le 4 \Leftrightarrow 4 \ge 2a + b \ge 2a \Leftrightarrow 2 \ge a \Leftrightarrow 2a \ge a^2 \Leftrightarrow a^2 \le 2a$

Do đó $P = a^2 - 2a - b \le 2a - 2a - b \le 0$.

Vậy GTLN của P bằng 0. Đạt được khi $(a;b) \in \{(0;0),(2;0)\}$

Mặt khác $2a + 3b \le 6 \Leftrightarrow -b \ge \dfrac{2a-6}{3}$.

Suy ra $P = a^2 - 2a - b \ge a^2 - 2a + \dfrac{2a-6}{3} = \left(a - \dfrac{2}{3}\right)^2 - \dfrac{22}{9} \ge -\dfrac{22}{9}$

Vậy GTNN của P bằng $-\dfrac{22}{9}$. Đạt được khi $(a;b) = \left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{14}{9}\right)$

Câu 10. Giải phương trình $\sqrt{3x^2 + 33} + 3\sqrt{x} = 2x + 7$

Gợi ý: ĐKXĐ: $x \ge 0$. Ta có $\sqrt{3x^2+33} - (x+5) = (x+2) - 3\sqrt{x}$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2 - 10x + 8}{\sqrt{3x^2+33} + x + 5} = \frac{x^2 - 5x + 4}{x + 2 + 3\sqrt{x}} \Leftrightarrow (x-1)(x-4)\left(\frac{2}{\sqrt{3x^2+33} + x + 5} - \frac{1}{x + 2 + 3\sqrt{x}}\right) = 0$$

Xét $(x-1)(x-4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 4 \end{array}\right.$. Xét $\dfrac{2}{\sqrt{3x^2+33} + x + 5} - \dfrac{1}{x + 2 + 3\sqrt{x}} = 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x^2+33} - 6\sqrt{x} = x - 1 \Leftrightarrow \frac{3(x-1)(x-11)}{\sqrt{3x^2+33} + 6\sqrt{x}} - (x-1) = 0$$

Với x = 1 là nghiệm. Với x ≠ 1, ta có $\frac{3(x-11)}{\sqrt{3x^2+33}+6\sqrt{x}}=1 \Leftrightarrow \sqrt{3x^2+33}+6\sqrt{x}=3x-33$

Kết hợp với $\sqrt{3x^2+33}+3\sqrt{x}=2x+7$, được $x-3\sqrt{x}-40=0$

$\Leftrightarrow(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-8)=0 \Leftrightarrow x=64$. Vậy tập nghiệm phương trình $S=\{1;4;64\}$

II- PHẦN TỰ LUẬN *(Thí sinh trình bày lời giải vào tờ giấy thi)*

Câu 11. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2+\dfrac{2xy}{x+y}=1 \\ \sqrt{2x+y+1}(x^2-x-1)=2 \end{cases}$

Giải: ĐKXĐ: $x+y\neq 0;\ 2x+y+1>0;\ x^2-x-1>0$ (*). Từ phương trình $x^2+y^2+\dfrac{2xy}{x+y}=1$

$\Rightarrow x^2(x+y)+y^2(x+y)+2xy-x-y=0$

$\Leftrightarrow x^2(x+y)-x^2+y^2(x+y)-y^2+x^2+2xy+y^2-x-y=0$

$\Leftrightarrow x^2(x+y-1)+y^2(x+y-1)+(x+y)(x+y-1)=0 \Leftrightarrow (x+y-1)(x^2+y^2+x+y)=0$

Xét $x+y-1=0$ thay vào phương trình $\sqrt{2x+y+1}(x^2-x-1)=2$ được

$\sqrt{x+2}(x^2-x-1)=2$. Với điều kiện $x^2-x-1\geq 0$, ta có $(x+2)(x^2-x-1)^2=4$

$\Leftrightarrow(x+2)(x^4-2x^3-x^2+2x+1)-4=0 \Leftrightarrow x^5-5x^3+5x-2=0$

$\Leftrightarrow x^5-4x^3-x^3+4x+x-2=0 \Leftrightarrow (x-2)(x^4+2x^3-x^2-2x+1)=0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x^2+x-1)^2=0$. Với $x-2=0 \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow y=-1$ (TMĐK).

Với $x^2+x-1=0 \Leftrightarrow x_1=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y_1=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$; $x_2=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x^2-x-1<0$ (loại)

Xét $x^2+y^2+x+y=0$, ta có $x^2+y^2+x+y=(x^2-x-1)+y^2+(2x+y+1)>0$ (theo ĐKXĐ)

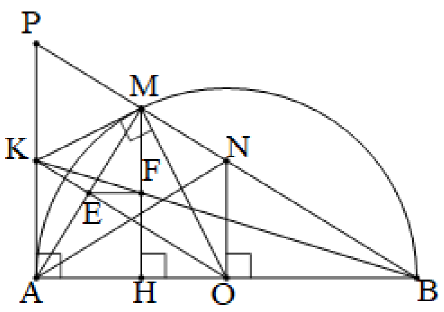
Thay vào ĐKXĐ (*) . Hệ phương trình có tập nghiệm $(x;y)\in\left\{(2;-1),\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2};\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$

Câu 12. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB = 2R. Lấy điểm M bất kỳ trên nửa đường tròn (M khác A, B), các tiếp tuyến tại A và M của nửa đường tròn (O) cắt nhau tại K. Gọi E là giao điểm của AM và OK. Đường thẳng qua O vuông góc với AB cắt BM tại N.

a) Tính BM. AN theo R

b) Vẽ MH vuông góc với AB tại H. Gọi F là giao điểm của BK và MH. Chứng minh rằng EF song song với AB và $BH.OK = OE.AB$

Giải: a) Ta có $\widehat{BMA} = \widehat{BON} = 90^0$



$\Rightarrow \Delta BMA \backsim \Delta BON \Rightarrow \frac{BM}{BO} = \frac{BA}{BN}$

$\Rightarrow BM.BN = BA.BO = 2R^2$

Vì $NO \perp AB$ nên ΔANB cân tại N

Suy ra BN = AN, suy ra $BM.AN = 2R^2$

b) Ta có KM = KA, OM = OA nên KO là trung trực của AM, suy ra $KO \perp AM$ và EA = EM (1). Gọi P là giao điểm của đường thẳng BM và đường thẳng AK. Ta có ΔAMP vuông tại M, có KM = KA nên KM = KA = KP. Áp dụng hệ quả định lý Thales, ta có $\frac{FM}{KP} = \frac{BF}{BK} = \frac{FH}{KA}$

$\Rightarrow$ FM = FH (2). Từ (1) và (2) suy ra EF là đường trung bình ΔAHM nên EF // AB

Mặt khác OK cũng là đường trung bình của ΔABP nên OK // BP. Ta có $\widehat{ABM} = \widehat{AOK}$

và $\widehat{AMB} = \widehat{OAK} = 90^0 \Rightarrow \Delta BMA \backsim \Delta OAK \Rightarrow \frac{BM}{OA} = \frac{BA}{OK}$, tương tự $\Delta BHM \backsim \Delta OEA$

$\Rightarrow \frac{BM}{OA} = \frac{BH}{OE}$. Suy ra $\frac{BA}{OK} = \frac{BH}{OE} \Rightarrow BH.OK = OE.AB$

Câu 13. Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn $x^3 + y^3 + z^3 = 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{xy + yz + zx + x^3 + y^3 + z^3}{5(xy + yz + zx) + 1}$

Giải: Áp dụng BĐT Cauchy ta có $9 = x^3 + 1 + 1 + y^3 + 1 + 1 + z^3 + 1 + 1 \geq 3(x + y + z)$

$\Leftrightarrow x + y + z \leq 3$. Lại có $3(xy + yz + zx) \leq (x + y + z)^2 \leq 9 \Leftrightarrow xy + yz + zx \leq 3$

Do đó $5P = \frac{5(xy + yz + zx) + 15}{5(xy + yz + zx) + 1} = 1 + \frac{14}{5(xy + yz + zx) + 1} \geq 1 + \frac{14}{5.3 + 1} = \frac{15}{8} \Rightarrow P \geq \frac{3}{8}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{3}{8}$. Đạt được khi x = y = z = 1.