SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **HÀ TĨNH**	**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH LỚP 10 THPT** **NĂM HỌC 2022-2023**
ĐỀ THI CHÍNH THỨC *(Đề thi có 01 trang, gồm 05 câu)*	Môn thi: **TOÁN** Thời gian làm bài: **150** phút *(không kể thời gian giao đề)*

Câu 1. (5,0 điểm)

a) Tìm số giá trị nguyên của tham số m để $\dfrac{x^2-4x-4}{x^2-2(m-1)x+16}\le 2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

b) Giải phương trình $x^3+x^2-3x-2=2\sqrt{x+2}.$

Câu 2. (2,0 điểm)

Để gây quỹ cho chương trình Tết yêu thương, một trường THPT tổ chức cho các lớp gói bánh chưng và bánh tét. Mỗi lớp được sử dụng tối đa 10kg gạo nếp, 1kg thịt và $1,6$kg đậu xanh. Để gói 1 cái bánh chưng cần $0,5$kg gạo nếp, $0,05$kg thịt và $0,1$kg đậu xanh. Để gói 1 cái bánh tét cần $0,75$kg gạo nếp, $0,075$kg thịt và $0,1$kg đậu xanh. Mỗi cái bánh chưng bán được 30 ngàn đồng, mỗi cái bánh tét bán được 40 ngàn đồng. Để thu được số tiền nhiều nhất, mỗi lớp cần gói bao nhiêu cái bánh chưng, bao nhiêu cái bánh tét?

Câu 3. (6,0 điểm)

a) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có điểm $M(2;3)$ là trung điểm của cạnh AB, điểm $H(1;5)$ và điểm $K(5;9)$ lần lượt là chân đường cao kẻ từ C và B, điểm D thuộc đường thẳng $\Delta: x-2y-1=0$ sao cho tam giác BCD cân tại C. Tìm tọa độ các điểm C và D, biết rằng điểm B có hoành độ âm.

b) Cho tam giác ABC không vuông có độ dài đường trung tuyến kẻ từ A là $m_a=5$, độ dài các đường cao kẻ từ B và C lần lượt là $h_b=8$ và $h_c=6$. Tính $\cos A$.

Câu 4. (5,0 điểm)

a) Cho tập hợp $A=\{0;1;2;3;4;5;6;7\}$. Gọi B là tập hợp tất cả các số tự nhiên chẵn có 8 chữ số được lập từ A và C là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 8 chữ số đôi một khác nhau được lập từ A sao cho tổng 4 chữ số đầu bằng tổng 4 chữ số cuối. Tìm số phần tử của tập hợp B và số phần tử của tập hợp C.

b) Cho đa thức $f(x)=ax^3-x^2+bx-1$ với a,b là các số thực, $a\ne 0$, có 3 nghiệm đều là số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{2-3ab-10a}{a^2}.$$

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho bảng vuông 3×3 gồm 9 hình vuông đơn vị. Điền vào mỗi ô vuông đơn vị của bảng một chữ số 0, 1, …, 9. Hỏi có bao nhiêu cách điền để tổng các số trên mỗi hàng và tổng các số trên mỗi cột đều là số lẻ. Biết rằng các chữ số được điền vào đủ 9 ô của bảng và không có chữ số nào được lặp lại.

---------------------------**HẾT**---------------------------

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu;
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: ……………………………………………… Số báo danh: ………………….

Câu 1. (5,0 điểm)

a) Tìm số giá trị nguyên của tham số m để $\dfrac{x^2-4x-4}{x^2-2(m-1)x+16}\le 2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.

b) Giải phương trình $x^3+x^2-3x-2=2\sqrt{x+2}$.

Lời giải

a) Để $\dfrac{x^2-4x-4}{x^2-2(m-1)x+16}\le 2$ với mọi giá trị $x\in\mathbb{R}$ trước hết cần điều kiện:

$x^2-2(m-1)x+16\ne 0,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \Delta'<0\Leftrightarrow (m-1)^2-16<0\Leftrightarrow -3<m<5$.(1)

Khi đó do $x^2-2(m-1)x+16>0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên yêu cầu bài toán

$\Leftrightarrow x^2-4x-4\le 2x^2-4(m-1)x+32$ với mọi giá trị $x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x^2-4(m-2)x+36\ge 0$ với mọi giá trị $x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \Delta'\le 0\Leftrightarrow 4(m-2)^2-36\le 0\Leftrightarrow -1\le m\le 5$.(2)

Từ (1) và (2) suy ra $-1\le m<5$ là tất cả giá trị cần tìm.

Vì m nguyên nên $m\in\{-1;0;1;2;3;4\}$: có tất cả 6 giá trị.

b)

Điều kiện: $x\ge -2$.

Phương trình tương đương $(x+2)\left(x^2-x-1\right)=2\sqrt{x+2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ \sqrt{x+2}\left(x^2-x-1\right)=2.\ (*) \end{array}\right.$$

Đặt $t=\sqrt{x+2},\ t\ge 0\ \Rightarrow x=t^2-2$

PT (*) trở thành $t\left[\left(t^2-2\right)^2-t^2+2-1\right]=2\Leftrightarrow t^5-5t^3+5t-2=0$

$\Leftrightarrow (t-2)\left(t^4+2t^3-t^2-2t+1\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t^4+2t^3-t^2-2t+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ \left(t^2+t-1\right)^2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right..$$

Với $t=2\Rightarrow x=2$;

Với $t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Vậy PT có 3 nghiệm $x=\pm 2,\ x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Câu 2. (2,0 điểm)

Để gây quỹ cho chương trình Tết yêu thương, một trường THPT tổ chức cho các lớp gói bánh chưng và bánh tét. Mỗi lớp được sử dụng tối đa 10kg gạo nếp, 1kg thịt và $1,6$ kg đậu xanh. Để gói 1 cái bánh chưng cần $0,5$kg gạo nếp, $0,05$kg thịt và $0,1$kg đậu xanh. Để gói 1 cái bánh tét cần $0,75$kg gạo nếp, $0,075$kg thịt và $0,1$kg đậu xanh. Mỗi cái bánh chưng bán được 30 ngàn đồng, mỗi cái bánh tét bán được 40 ngàn đồng. Để thu được số tiền nhiều nhất, mỗi lớp cần gói bao nhiêu cái bánh chưng, bao nhiêu cái bánh tét?

Lời giải

Gọi số bánh chưng gói được là x; số bánh tét gói được là y.

Khi đó số tiền thu được là: $F\left(x,y\right)=30x+40y$.

Số kg gạo nếp cần dùng là $0,5x+0,75y$.

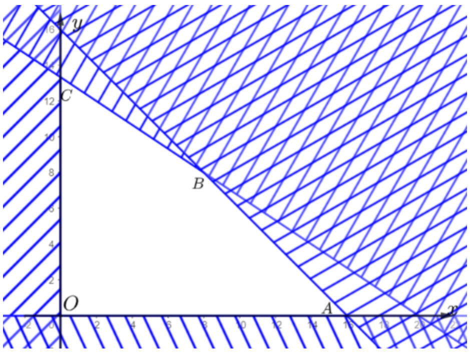
Số kg thịt cần dùng là $0,05x+0,075y$.

Số kg đậu xanh cần dùng là $0,1x+0,1y$.

Vì mỗi lớp chỉ được sử dụng tối đa 10kg gạo nếp, 1kg thịt; $1,6$kg đậu xanh nên ta có hệ

$$\begin{cases}0,5x+0,75y\le 10\\ 0,05x+0,075y\le 1\\ 0,1x+0,1y\le 1,6\\ x\ge 0,y\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+3y\le 40\\ 2x+3y\le 40\\ x+y\le 16\\ x\ge 0,y\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+3y\le 40\\ x+y\le 16\\ x\ge 0,y\ge 0\end{cases}\quad (*)$$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $F\left(x,y\right)=30x+40y$ trên miền nghiệm của hệ bất phương trình $(*)$.



Miền nghiệm của hệ bất phương trình $(*)$ là tứ giác $OABC$ (kể cả biên), trong đó $O\left(0;0\right)$, $A\left(16;0\right)$, $B\left(8;8\right)$, $C\left(0;\dfrac{40}{3}\right)$.

Hàm số $F\left(x,y\right)$ sẽ đạt giá trị lớn nhất trên miền nghiệm của hệ bất phương trình $(*)$ khi $\left(x;y\right)$ là tọa độ của một trong các đỉnh O,A,B,C.

Ta có

$F\left(0;0\right)=0$;

$F\left(16;0\right)=30.16+40.0=480$;

$F(8;8)=30.8+40.8=560$;

$F\left(0;\frac{40}{3}\right)=30.0+40.\frac{40}{3}=\frac{1600}{3}$.

Suy ra $F(x,y)$ đạt giá trị lớn nhất bằng 560 khi $(x,y)=(8;8)$.

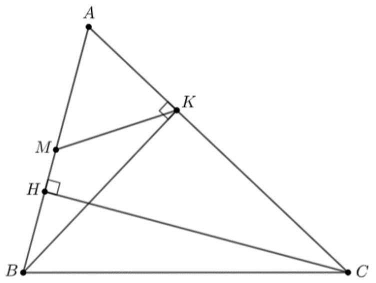
Vậy để thu được số tiền nhiều nhất, mỗi lớp cần gói 8 cái bánh chưng và 8 cái bánh tét.

Câu 3. (6,0 điểm)

a) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có điểm $M(2;3)$ là trung điểm của cạnh AB, điểm $H(1;5)$ và điểm $K(5;9)$ lần lượt là chân đường cao kẻ từ C và B, điểm D thuộc đường thẳng $\Delta: x-2y-1=0$ sao cho tam giác BCD cân tại C. Tìm tọa độ các điểm C và D, biết rằng điểm B có hoành độ âm.

b) Cho tam giác ABC không vuông có độ dài đường trung tuyến kẻ từ A là $m_a=5$, độ dài các đường cao kẻ từ B và C lần lượt là $h_b=8$ và $h_c=6$. Tính $\cos A$.

Lời giải



a)

Đường thẳng AB đi qua hai điểm $M(2;3)$ và $H(1;5)$ có phương trình $2x+y-7=0$.

Đường thẳng CH qua $H(1;5)$ và vuông góc với đường thẳng $AB: 2x+y-7=0$ nên có phương trình $x-2y+9=0$.

Vì $B\in AB$ nên gọi $B(b;7-2b)$, $b<0$.

Vì ΔABK vuông tại K nên ta có $MB=MK \Leftrightarrow (b-2)^2+(4-2b)^2=45$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=5 \\ b=-1 \end{array}\right.$. Vì $b<0$ nên $B(-1;9)$. Vì M là trung điểm AB nên ta có $A(5;-3)$.

Đường thẳng CK đi qua hai điểm $A(5;-3), K(5;9)$ nên CK có phương trình $x=5$.

Vì $C=CH\cap AK$ nên suy ra $C(5;7)$.

Vì D thuộc $\Delta: x-2y-1=0$ nên gọi $D(2d+1;d)$.

Tam giác BCD cân tại C suy ra

$CD=CB \Leftrightarrow (2d-4)^2+(d-7)^2=40 \Leftrightarrow d^2-6d+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d=1 \\ d=5. \end{array}\right.$

+ Với $d=1$ ta có $D(3;1)$ thoả mãn.

+ Với $d=5$ ta có $D(11;5)$ không thoả mãn (vì khi đó ba điểm B,C,D thẳng hàng).

Vậy $D(3;1)$.

b) Ta có $\sin A = \frac{2S}{bc} = \frac{bh_b}{bc} = \frac{h_b}{c} = \frac{8}{c} \Rightarrow c = \frac{8}{\sin A}$.

Tương tự $b = \frac{6}{\sin A}$.

Lại có $m_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = 25 \Rightarrow a^2 = 2\left(b^2+c^2\right) - 100$

Suy ra $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{100-\left(b^2+c^2\right)}{2bc} = \frac{100-\left(\frac{36}{\sin^2 A}+\frac{64}{\sin^2 A}\right)}{2.\frac{6}{\sin A}.\frac{8}{\sin A}}$

$\Leftrightarrow \cos A = \frac{100\sin^2 A - 100}{96} = \frac{25}{24}\left(\sin^2 A - 1\right) = -\frac{25}{24}\cos^2 A$

$\Leftrightarrow \cos A = -\frac{24}{25}$. ($\cos A \neq 0$ do tam giác ABC không vuông).

Câu 4. (5,0 điểm)

a) Cho tập hợp $A = \{0;1;2;3;4;5;6;7\}$. Gọi B là tập hợp tất cả các số tự nhiên chẵn có 8 chữ số được lập từ A và C là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 8 chữ số đôi một khác nhau được lập từ A sao cho tổng 4 chữ số đầu bằng tổng 4 chữ số cuối. Tìm số phần tử của tập hợp B và số phần tử của tập hợp C.

b) Cho đa thức $f(x) = ax^3 - x^2 + bx - 1$ với a, b là các số thực, $a \neq 0$, có 3 nghiệm đều là số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{2-3ab-10a}{a^2}$.

Lời giải

a) Gọi số cần lập thuộc B có dạng $\overline{a_1a_2...a_8}$. Khi đó $a_1 \neq 0$ và $a_8 \in \{0;2;4;6\}$.

+) Chọn a_1 có 7 cách chọn;

+) Chọn a_8 có 4 cách chọn;

+) Mỗi chữ số còn lại đều có 8 cách chọn.

Số phần tử của tập B bằng $7.4.8^6 = 28.8^6$.

Do $0+1+2+3+4+5+6+7=28$, nên để tổng 4 chữ số đầu và tổng 4 chữ số cuối bằng nhau thì mỗi tổng bằng 14.

Ta lập 4 bộ số có tổng là 14 và có chữ số 0 gồm:

$(0;1;6;7)$; $(0;2;5;7)$; $(0;3;4;7)$; $(0;3;5;6)$.

Với mỗi bộ số có số 0 trên ứng với một bộ còn lại không có số 0 và có tổng bằng 14.

TH1: Bộ có số 0 đứng sau.

+) Có 4 cách chọn một bộ có chữ số 0;

+) Xếp bộ không có chữ số 0 đứng trước có $4!$ cách;

+) Xếp bộ có chữ số 0 đứng sau có $4!$ cách.

Áp dụng qui tắc nhân có $4.4!.4! = 2304$ số.

TH2: Bộ có số 0 đứng trước.

+) Có 4 cách chọn một bộ có chữ số 0;

+) Xếp 4 số đầu có $3.3!$ cách;

+) Xếp 4 số cuối có $4!$ cách.

Áp dụng qui tắc nhân có $4.3.3!.4! = 1728$ số.

Vậy số phần tử của tập hợp C bằng $1728 + 2304 = 4032$.

b) Giả sử phương trình đã cho có ba nghiệm $x_1, x_2, x_3 > 0$.

Theo Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = x_1.x_2.x_3 = \dfrac{1}{a} > 0 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = \dfrac{b}{a} > 0 \end{cases} \Rightarrow a, b > 0.$

Đặt $t = \dfrac{1}{a}, (t > 0)$. Ta có:

$x_1 + x_2 + x_3 = x_1x_2x_3 \le \left(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right)^3$ (áp dụng BĐT Côsi) $\Rightarrow t \le \dfrac{t^3}{27} \Leftrightarrow t \ge 3\sqrt{3}.$

Ta có $-3 \cdot \dfrac{b}{a} = -3\left(x_1x_2 + x_1x_3 + x_3x_1\right) \ge -\left(x_1 + x_2 + x_3\right)^2 = -t^2$.

Khi đó $P = \dfrac{2 - 3ab - 10a}{a^2} = 2 \cdot \dfrac{1}{a^2} - 3 \cdot \dfrac{b}{a} - 10 \cdot \dfrac{1}{a} \ge t^2 - 10t.$

Xét hàm số $f(t) = t^2 - 10t, t \ge 3\sqrt{3}$. Do $f(t)$ đồng biến trên $\left[3\sqrt{3}; +\infty\right)$ nên

$\min\limits_{x \in \left[3\sqrt{3}; +\infty\right)} f(t) = 27 - 30\sqrt{3} \Leftrightarrow t = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{3\sqrt{3}} \\ b = \sqrt{3} \end{cases}.$

Với $\begin{cases} a = \dfrac{1}{3\sqrt{3}} \\ b = \sqrt{3} \end{cases}$, bài toán thoả mãn. Vậy $\min P = 27 - 30\sqrt{3}$.

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho bảng vuông 3×3 gồm 9 hình vuông đơn vị. Điền vào mỗi ô vuông đơn vị của bảng một chữ số 0, 1,…, 9. Hỏi có bao nhiêu cách điền để tổng các số trên mỗi hàng và tổng các số trên mỗi cột đều là số lẻ. Biết rằng các chữ số được điền vào đủ 9 ô của bảng và không có chữ số nào được lặp lại.

Lời giải

L	C	C
L	L	L
L	C	C

Do tổng các chữ số ở mỗi hàng là lẻ nên tổng các chữ số trong bảng gồm 3 hàng là số lẻ. Suy ra bộ 9 chữ số cần điền vào bảng phải có 5 chữ số lẻ và 4 chữ số chẵn.

Ta có 5 cách chọn một bộ 9 chữ số thoả mãn điều này (tương ứng là một cách bỏ đi một chữ số chẵn).

Bây giờ, xét 1 bộ 9 chữ số được chọn gồm 5 chữ số lẻ và 4 chữ số chẵn. Ta cần điền hết cả 9 chữ số này vào bảng (mỗi ô một chữ số) sao cho tổng các số trên mỗi hàng, mỗi cột đều là lẻ.

Để thỏa mãn, bộ 3 chữ số trên cùng hàng hay cùng cột phải gồm hoặc 3 chữ số lẻ, hoặc 1 chữ số lẻ, 2 chữ số chẵn. Vì chỉ có 3 hàng và chỉ có 5 số lẻ nên ta phải có đúng 1 hàng có 3 chữ số lẻ và 2 hàng có 1 chữ số lẻ, 2 chữ số chẵn.

Tương tự, trong 3 cột cũng có đúng 1 cột có 3 chữ số lẻ và 2 cột có 1 chữ số lẻ, 2 chữ số chẵn.

Xét 1 hàng và 1 cột có 3 chữ số lẻ. Khi đó hàng và cột này chiếm 5 ô của bảng và có mặt đúng 5 chữ số lẻ của bộ 9 chữ số được chọn ban đầu. Bốn ô còn lại sẽ là vị trí cho 4 chữ số chẵn.

Như vậy, số cách xếp 9 chữ số được tính bởi tích của:

* Số cách chọn 1 hàng có 3 chữ số lẻ trong 3 hàng: có 3 cách.

* Số cách chọn 1 cột kiểu 3 chữ số lẻ trong 3 cột: có 3 cách.

* Số cách điền 5 chữ số lẻ vào 5 ô của hàng và cột: có 5! cách.

* Số cách điền 4 chữ số chẵn vào 4 ô còn lại: có 4! cách.

Tổng số cách điền số vào bảng thỏa mãn đề bài là $5.3.3.5!.4! = 129600$.