SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÁI BÌNH

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2023 - 2024

Môn: **TOÁN**

Thời gian làm bài: 150 phút *(không kể thời gian giao đề)*

Bài 1. *(3,0 điểm)*

1. Cho các số thực dương a,b thỏa mãn: $b(a+1)=1-a$.

Tính giá trị của biểu thức: $P=a\sqrt{\dfrac{1+b^2}{1+a^2}}+b\sqrt{\dfrac{1+a^2}{1+b^2}}+\sqrt{\dfrac{(1+a^2)(1+b^2)}{4}}$.

2. Chứng minh: $B=\sqrt{1+2023^2+\dfrac{2023^2}{2024^2}}+\dfrac{2023}{2024}$ là số tự nhiên.

Bài 2. *(3,0 điểm)*

1. Trên hệ trục tọa độ Oxy cho điểm hai điểm $A(-1;1)$, $B(-5;-3)$ và đường thẳng $(d): y=ax+b$

a) Tính diện tích tam giác OAB.

b) Tìm a và b biết đường thẳng (d) vuông góc với đường thẳng AB và tiếp xúc với đường tròn tâm $O(0;0)$ bán kính $R=4\sqrt{2}$.

2. Cho đa thức $f(x)=x^3+ax^2+bx+2$ với a,b là các số hữu tỉ. Biết đa thức đã cho có một nghiệm là $x=2-\sqrt{3}$, tìm các nghiệm còn lại của đa thức.

Bài 3. *(4,0 điểm)*

1. Giải phương trình: $4x^2+3x+2=3\sqrt{x^3+3x^2+3x+2}$

2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+\sqrt{x-y}=2y+1+\sqrt{y+1} \\ 8x^3-52y^2-15x+11=(x+3).\sqrt[3]{12y^2+6x-5} \end{cases}$

Bài 4. *(2,0 điểm)*

Cho các số thực dương x,y,z thoả mãn: $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$Q=\frac{x^2+yz}{x\sqrt{y+z}}+\frac{y^2+zx}{y\sqrt{z+x}}+\frac{z^2+xy}{z\sqrt{x+y}}$$

Bài 5. *(3,0 điểm)*

Cho tam giác ABC nhọn có $AB<AC$ và nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AM, BN, CP cắt nhau tại H. Gọi K,Q lần lượt là giao điểm của NP với AH và AO, I là trung điểm của AH.

1. Chứng minh: $IN^2=IK.IM$.

2. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của BN và CP. Chứng minh EF vuông góc với QM.

Bài 6. *(3,0 điểm)*

Cho đường thẳng (d) và đường tròn (O; R) không giao nhau. Trên đường thẳng (d) lấy điểm A. Từ điểm A kẻ tiếp tuyến AB, AC với (O; R), (B, C là tiếp điểm) và cát tuyến ADE không đi qua tâm O, (D nằm giữa A và E). Gọi I là trung điểm của DE. Đường thẳng BC cắt OA và OI lần lượt tại H và K.

1. Chứng minh rằng KE là tiếp tuyến của (O; R).

2. Chứng minh rằng khi A di động trên (d) thì H di động trên một đường tròn cố định.

Bài 7. *(2,0 điểm)*

Cho a,b là các số nguyên, $a\neq -1$, $b\neq -1$ thỏa mãn: $\dfrac{(a-1)(a+1)^2+(b-1)(b+1)^2}{a+b+ab+1}$ là số nguyên.

Chứng minh: $a^{2023}b^{2024}-a$ chia hết cho a^2+a.

--- HẾT ---

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

Tác giả: Nguyễn Tiến Mỹ

Đội tuyển HSG huyện Đức Thọ, Hà Tĩnh, năm học 2023-2024

Bài 1. *(3,0 điểm)*

1. Cho các số thực dương a, b thỏa mãn: $b(a+1)=1-a$.

Tính giá trị của biểu thức $P=a\sqrt{\dfrac{1+b^2}{1+a^2}}+b\sqrt{\dfrac{1+a^2}{1+b^2}}+\sqrt{\dfrac{(1+a^2)(1+b^2)}{4}}$.

2. Chứng minh: $B=\sqrt{1+2023^2+\dfrac{2023^2}{2024^2}}+\dfrac{2023}{2024}$ là số tự nhiên.

Lời giải.

1. Từ giả thiết, ta có $ab+a+b=1$. Thế vào P ta có: $P=a\sqrt{\dfrac{1+b^2}{1+a^2}}+b\sqrt{\dfrac{1+a^2}{1+b^2}}+\sqrt{\dfrac{(1+a^2)(1+b^2)}{4}}$

$$=a\sqrt{\frac{ab+a+b+b^2}{ab+a+b+a^2}}+b\sqrt{\frac{ab+a+b+a^2}{ab+a+b+b^2}}+\sqrt{\frac{(ab+a+b+a^2)(ab+a+b+b^2)}{4}}$$

$$=a\sqrt{\frac{(a+b)(b+1)}{(a+b)(a+1)}}+b\sqrt{\frac{(a+b)(a+1)}{(a+b)(b+1)}}+\sqrt{\frac{(a+b)(a+1)(a+b)(b+1)}{4}}$$

$$=a\sqrt{\frac{b+1}{a+1}}+b\sqrt{\frac{a+1}{b+1}}+(a+b)\sqrt{\frac{(a+1)(b+1)}{4}}=\sqrt{(a+1)(b+1)}\left(\frac{a}{a+1}+\frac{b}{b+1}+\frac{a+b}{2}\right)$$

$$=\sqrt{ab+a+b+1}\left(2+\frac{a+b}{2}-\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}\right)\right)=\sqrt{2}\left(2+\frac{a+b}{2}-\frac{a+b+2}{(a+1)(b+1)}\right)$$

$$=\sqrt{2}\left(2+\frac{a+b}{2}-\frac{a+b+2}{ab+a+b+1}\right)=\sqrt{2}\left(2+\frac{a+b}{2}-\frac{a+b+2}{2}\right)=\sqrt{2}\,(2-1)=\sqrt{2}.$$

Vậy $P=\sqrt{2}$ khi tồn tại các số thực dương a, b thỏa mãn $b(a+1)=1-a$.

2. Ta có: $B=\sqrt{1+2023^2+\dfrac{2023^2}{2024^2}}+\dfrac{2023}{2024}=\sqrt{(1+2023)^2-2.2023+\dfrac{2023^2}{2024^2}}+\dfrac{2023}{2024}$

$$=\sqrt{2024^2-2.2024.\frac{2023}{2024}+\frac{2023^2}{2024^2}}+\frac{2023}{2024}=\sqrt{\left(2024-\frac{2023}{2024}\right)^2}+\frac{2023}{2024}=2024-\frac{2023}{2024}+\frac{2023}{2024}=2024.$$

Do 2024 là số tự nhiên nên ta có đpcm.

Bài 2. *(3,0 điểm)*

1. Trên hệ trục tọa độ Oxy cho hai điểm $A(-1;1)$, $B(-5;-3)$ và đường thẳng $(d): y=ax+b$

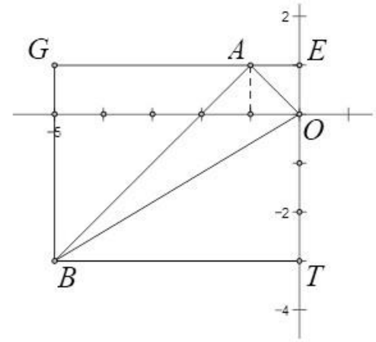
a) Tính diện tích tam giác OAB.

b) Tìm a và b biết đường thẳng (d) vuông góc với đường thẳng AB và tiếp xúc với đường tròn tâm $O(0;0)$ bán kính $R=4\sqrt{2}$.

2. Cho đa thức $f(x)=x^3+ax^2+bx+2$ với a, b là các số hữu tỉ. Biết đa thức đã cho có một nghiệm là $x=2-\sqrt{3}$ tìm các nghiệm còn lại của đa thức.

Lời giải.

1a). Dựng hình chữ nhật $GETB$ như hình vẽ dưới đây.



Theo bài ra, ta có: $AG = |x_G - x_A| = |-5-(-1)| = 4$.

Tương tự ta có: $AE = OE = 1$; $BG = 4$; $OT = 3$; $BT = 5$.

$\Rightarrow S_{GEBT} = BG.BT = 4.5 = 20$; $S_{GAB} = \dfrac{BG.AG}{2} = \dfrac{4.4}{2} = 8$;

$S_{OAE} = \dfrac{OE.AE}{2} = \dfrac{1.1}{2} = \dfrac{1}{2}$; $S_{OTB} = \dfrac{OT.BT}{2} = \dfrac{3.5}{2} = \dfrac{15}{2}$.

$\Rightarrow S_{OAB} = S_{GEBT} - S_{GAB} - S_{OAE} - S_{OTB} = 20 - 8 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{15}{2} = 4$ (đơn vị diện tích).

Vậy $S_{OAB} = 4$ đơn vị diện tích.

1b) b) Gọi đường thẳng $(\mathrm{AB}): y = mx + k$ đi qua $A(-1;1)$, $B(-5;-3)$ nên

$\begin{cases} -m + k = 1 \\ -5m + k = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ k = 2 \end{cases} \Rightarrow (\mathrm{AB}): y = x + 2$. Vì (d) $\perp$ (AB) nên $a = -1$, khi đó $(d): y = -x + b$

Giả sử (d) tiếp xúc với $\left(O; 4\sqrt{2}\right)$ tại K và vuông góc với (AB) tại H. Dễ thấy AOKH là hình chữ nhật, suy ra $AH = OK = 4\sqrt{2}$. Tọa độ H là nghiệm của hệ phương trình

$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = -x + b \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{b-2}{2}; y = \dfrac{b+2}{2}$. Suy ra $H\left(\dfrac{b-2}{2}; \dfrac{b+2}{2}\right) \Rightarrow AH = \dfrac{|b|}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow 4\sqrt{2} = \dfrac{|b|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |b| = 8 \Leftrightarrow b = \pm 8$. Vậy $(a;b) \in \{(-1;-8), (-1;8)\}$ là giá trị cần tìm.

2. Do $x = 2 - \sqrt{3}$ là một nghiệm của $f(x) \Rightarrow f\left(2-\sqrt{3}\right) = 0$.

Thế $x = 2 - \sqrt{3}$ vào $f(x)$, ta có: $f\left(2-\sqrt{3}\right) = \left(2-\sqrt{3}\right)^3 + a\left(2-\sqrt{3}\right)^2 + b\left(2-\sqrt{3}\right) + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (7a + 2b + 28) - (4a + b + 15)\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow 7a + 2b + 28 = (4a + b + 15)\sqrt{3}$.

Do $a, b \in \mathbb{Q}$ nên $7a + 2b + 28$ là số hữu tỉ, $(4a + b + 15)\sqrt{3}$ là số vô tỉ.

Từ đó để phương trình trên thỏa mãn $\Rightarrow \begin{cases} 7a + 2b + 28 = 0 \\ 4a + b + 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -7 \end{cases}$ (Thỏa mãn $a, b \in \mathbb{Q}$).

$\Rightarrow f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2 = x^3 - 2x^2 - 7x + 2 = (x+2)\left(x^2 - 4x + 1\right)$.

Gọi k là một nghiệm của $f(x)$, ta có

$f(k) = 0 \Leftrightarrow (k+2)\left(k^2 - 4k + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k + 2 = 0 \\ k^2 - 4k + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = -2 \\ k = 2 \pm \sqrt{3} \end{array}\right.$.

Vậy nghiệm còn lại của $f(x)$ là -2; $2 + \sqrt{3}$.

Bài 3. *(4,0 điểm)*

1. Giải phương trình: $4x^2 + 3x + 2 = 3\sqrt{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}$.

2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + \sqrt{x - y} = 2y + 1 + \sqrt{y + 1} \\ 8x^3 - 52y^2 - 15x + 11 = (x+3)\sqrt[3]{12y^2 + 6x - 5} \end{cases}$.

Lời giải.

1. ĐKXĐ: $x \ge -2$.

Phương trình tương đương:

$$4x^2+3x+2=3\sqrt{\left(x^3+3x^2+3x+1\right)+1}=3\sqrt{\left(x+1\right)^3+1}=3\sqrt{\left(x+2\right)\left(x^2+x+1\right)}.$$

Đặt $\sqrt{x+2}=a;\ \sqrt{x^2+x+1}=b\left(\text{ĐK: } a\ge 0;\ b\ge \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\Rightarrow 4b^2-a^2=4\left(x^2+x+1\right)-\left(x+2\right)=4x^2+3x+2$.

Ta có phương trình ẩn a, b: $4b^2-a^2=3ab \Leftrightarrow a^2+3ab-4b^2=0 \Leftrightarrow (a-b)(a+4b)=0$.

Do $a\ge 0;\ b\ge \dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow a+4b\ge 0+4.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}>0$. Kết hợp phương trình trên ta có $a-b=0\Leftrightarrow a=b$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+2}=\sqrt{x^2+x+1}\Rightarrow x+2=x^2+x+1\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm 1$ (Thỏa mãn ĐKXĐ).

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\left\{\pm 1\right\}$.

2. ĐKXĐ: $x\ge y\ge -1$.

Xét phương trình đầu tiên, ta có: $x+\sqrt{x-y}-2y-1-\sqrt{y+1}=0\Leftrightarrow (x-2y-1)+\left(\sqrt{x-y}-\sqrt{y+1}\right)=0$

$$\Leftrightarrow (x-2y-1)+\frac{(x-y)-(y+1)}{\sqrt{x-y}+\sqrt{y+1}}=0\Leftrightarrow (x-2y-1)+\frac{x-2y-1}{\sqrt{x-y}+\sqrt{y+1}}=0$$

$\Leftrightarrow (x-2y-1)\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}+\sqrt{y+1}}\right)=0$. Vì $1+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}+\sqrt{y+1}}>1>0\Rightarrow x-2y-1=0\Leftrightarrow 2y=x-1\ (1)$.

Thế (1) vào phương trình thứ hai, ta có: $8x^3-13(x-1)^2-15x+11=(x+3)\sqrt[3]{3(x-1)^2+6x-5}$

$$\Leftrightarrow 8x^3-13x^2+11x-2=(x+3)\sqrt[3]{3x^2-2}\Leftrightarrow 8x^3-13x^2+11x-2-(x+3)\sqrt[3]{3x^2-2}=0$$

$$\Leftrightarrow 8x^3-13x^2+11x-2-(x+3)(2x-1)+(x+3)\left(2x-1-\sqrt[3]{3x^2-2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 8x^3-15x^2+6x+1+(x+3).\frac{(2x-1)^3-\left(3x^2-2\right)}{(2x-1)^2+(2x-1)\sqrt[3]{3x^2-2}+\sqrt[3]{\left(3x^2-2\right)^2}}=0$$

$$\Leftrightarrow 8x^3-15x^2+6x+1+(x+3).\frac{8x^3-15x^2+6x+1}{(2x-1)^2+(2x-1)\sqrt[3]{3x^2-2}+\sqrt[3]{\left(3x^2-2\right)^2}}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(8x^3-15x^2+6x+1\right)\left(1+\frac{x+3}{(2x-1)^2+(2x-1)\sqrt[3]{3x^2-2}+\sqrt[3]{\left(3x^2-2\right)^2}}\right)=0.$$

Với $x\ge -1$ ta dễ thấy $1+\dfrac{x+3}{(2x-1)^2+(2x-1)\sqrt[3]{3x^2-2}+\sqrt[3]{\left(3x^2-2\right)^2}}>1>0$

$\Rightarrow 8x^3-15x^2+6x+1=0\Leftrightarrow (x-1)^2(8x+1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\dfrac{-1}{8}\end{array}\right.$ (Thỏa mãn ĐKXĐ).

Với $x=1\Rightarrow$ Thế vào (1) ta có: $2y=x-1=1-1=0\Leftrightarrow y=0$ (Thỏa mãn ĐKXĐ).

Với $x=\dfrac{-1}{8}\Rightarrow$ Thế vào (1) ta có: $2y=x-1=\dfrac{-1}{8}-1=\dfrac{-9}{8}\Leftrightarrow y=\dfrac{-9}{16}$ (Thỏa mãn ĐKXĐ).

Vậy $(x;\ y)\in\left\{(1;\ 0);\ \left(\dfrac{-1}{8};\ \dfrac{-9}{16}\right)\right\}$.

Bài 4. *(2,0 điểm)*

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$Q=\frac{x^2+yz}{x\sqrt{y+z}}+\frac{y^2+zx}{y\sqrt{z+x}}+\frac{z^2+xy}{z\sqrt{x+y}}$$

Lời giải. Đặt $\sqrt{x}=a;\ \sqrt{y}=b;\ \sqrt{z}=c$ (ĐK: $a,\ b,\ c>0;\ a+b+c=1$).

$$\Rightarrow Q=\frac{x^2+yz}{x\sqrt{y+z}}+\frac{y^2+zx}{y\sqrt{z+x}}+\frac{z^2+xy}{z\sqrt{x+y}}=\frac{a^4+b^2c^2}{a^2\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{b^4+c^2a^2}{b^2\sqrt{c^2+a^2}}+\frac{c^4+a^2b^2}{c^2\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$=\left(\frac{\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+c^2\right)}{a^2\sqrt{b^2+c^2}}-\sqrt{b^2+c^2}\right)+\left(\frac{\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)}{b^2\sqrt{c^2+a^2}}-\sqrt{c^2+a^2}\right)+\left(\frac{\left(a^2+c^2\right)\left(b^2+c^2\right)}{c^2\sqrt{a^2+b^2}}-\sqrt{a^2+b^2}\right)$$

$$=\left(\frac{\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+c^2\right)}{a^2\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)}{b^2\sqrt{c^2+a^2}}+\frac{\left(a^2+c^2\right)\left(b^2+c^2\right)}{c^2\sqrt{a^2+b^2}}\right)-\left(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\right)$$

Áp dụng BĐT Bunhia, ta có: $\dfrac{\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+c^2\right)}{a^2\sqrt{b^2+c^2}}=\dfrac{\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+c^2\right)}.\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+c^2\right)}}{a^2\sqrt{b^2+c^2}}$

$$\geq\frac{\left(a^2+bc\right)\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+c^2\right)}}{a^2\sqrt{b^2+c^2}}=\frac{\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+c^2\right)}}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{bc\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+c^2\right)}}{a^2\sqrt{b^2+c^2}}.$$

Tương tự, ta có: $\dfrac{\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)}{b^2\sqrt{c^2+a^2}}\geq\dfrac{\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)}}{\sqrt{c^2+a^2}}+\dfrac{ca\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)}}{b^2\sqrt{c^2+a^2}}$;

Tương tự, ta có: $\dfrac{\left(a^2+c^2\right)\left(b^2+c^2\right)}{c^2\sqrt{a^2+b^2}}\geq\dfrac{\sqrt{\left(a^2+c^2\right)\left(b^2+c^2\right)}}{\sqrt{a^2+b^2}}+\dfrac{ab\sqrt{\left(a^2+c^2\right)\left(b^2+c^2\right)}}{c^2\sqrt{a^2+b^2}}$.

$$\Rightarrow\frac{\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+c^2\right)}{a^2\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)}{b^2\sqrt{c^2+a^2}}+\frac{\left(a^2+c^2\right)\left(b^2+c^2\right)}{c^2\sqrt{a^2+b^2}}\geq\frac{\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+c^2\right)}}{\sqrt{b^2+c^2}}$$

$$+\frac{bc\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+c^2\right)}}{a^2\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)}}{\sqrt{c^2+a^2}}+\frac{ca\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)}}{b^2\sqrt{c^2+a^2}}+\frac{\sqrt{\left(a^2+c^2\right)\left(b^2+c^2\right)}}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$+\frac{ab\sqrt{\left(a^2+c^2\right)\left(b^2+c^2\right)}}{c^2\sqrt{a^2+b^2}}=\left(\frac{\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+c^2\right)}}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)}}{\sqrt{c^2+a^2}}+\frac{\sqrt{\left(a^2+c^2\right)\left(b^2+c^2\right)}}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$+\left(\frac{bc\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+c^2\right)}}{a^2\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{ca\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)}}{b^2\sqrt{c^2+a^2}}+\frac{ab\sqrt{\left(a^2+c^2\right)\left(b^2+c^2\right)}}{c^2\sqrt{a^2+b^2}}\right)\ (1).$$

Áp dụng BĐT Cauchy, ta lại có: $\dfrac{\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+c^2\right)}}{\sqrt{b^2+c^2}}+\dfrac{\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)}}{\sqrt{c^2+a^2}}+\dfrac{\sqrt{\left(a^2+c^2\right)\left(b^2+c^2\right)}}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+c^2\right)}}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)}}{\sqrt{c^2+a^2}}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)}}{\sqrt{c^2+a^2}}+\frac{\sqrt{\left(a^2+c^2\right)\left(b^2+c^2\right)}}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+c^2\right)}}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{\sqrt{\left(a^2+c^2\right)\left(b^2+c^2\right)}}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$$\geq\sqrt{\frac{\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+c^2\right)}}{\sqrt{b^2+c^2}}.\frac{\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)}}{\sqrt{c^2+a^2}}}+\sqrt{\frac{\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)}}{\sqrt{c^2+a^2}}.\frac{\sqrt{\left(a^2+c^2\right)\left(b^2+c^2\right)}}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

$$+\sqrt{\frac{\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+c^2\right)}}{\sqrt{b^2+c^2}}.\frac{\sqrt{\left(a^2+c^2\right)\left(b^2+c^2\right)}}{\sqrt{a^2+b^2}}}=\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}$$

Tương tự ta có: $\dfrac{bc\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+c^2\right)}}{a^2\sqrt{b^2+c^2}}+\dfrac{ca\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)}}{b^2\sqrt{c^2+a^2}}+\dfrac{ab\sqrt{\left(a^2+c^2\right)\left(b^2+c^2\right)}}{c^2\sqrt{a^2+b^2}}$

$$\geq a\sqrt{\frac{b^2+c^2}{bc}}+b\sqrt{\frac{c^2+a^2}{ca}}+c\sqrt{\frac{a^2+b^2}{ab}}.$$

$$\Rightarrow VP_{(1)}\geq\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}+a\sqrt{\frac{b^2+c^2}{bc}}+b\sqrt{\frac{c^2+a^2}{ca}}+c\sqrt{\frac{a^2+b^2}{ab}}$$

$\geq\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}+a\sqrt{\dfrac{2bc}{bc}}+b\sqrt{\dfrac{2ca}{ca}}+c\sqrt{\dfrac{2ab}{ab}}$ (Áp dụng BĐT Cauchy)

$=\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}+(a+b+c)\sqrt{2}=\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}+\sqrt{2}$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow\dfrac{\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+c^2\right)}{a^2\sqrt{b^2+c^2}}+\dfrac{\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)}{b^2\sqrt{c^2+a^2}}+\dfrac{\left(a^2+c^2\right)\left(b^2+c^2\right)}{c^2\sqrt{a^2+b^2}}$

$$\geq\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}+\sqrt{2}.$$

$$\Rightarrow Q=\left(\frac{\left(a^2+b^2\right)\left(a^2+c^2\right)}{a^2\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)}{b^2\sqrt{c^2+a^2}}+\frac{\left(a^2+c^2\right)\left(b^2+c^2\right)}{c^2\sqrt{a^2+b^2}}\right)-\left(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\right)$$

$$\geq\left(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}+\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\right)=\sqrt{2}.$$

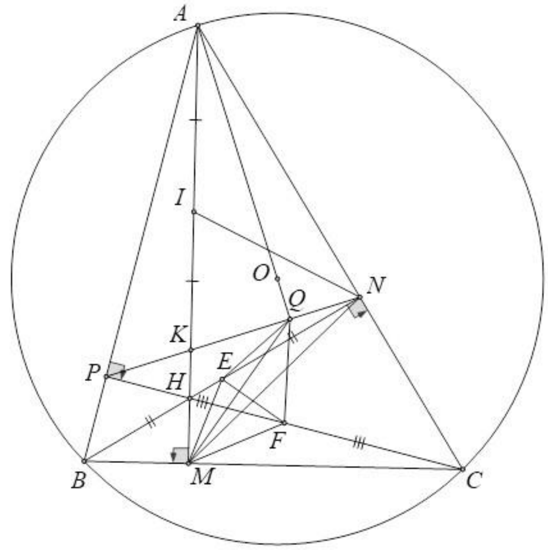
Vậy $\mathrm{Min}Q=\sqrt{2}$. Đạt được khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$ hay $x=y=z=\dfrac{1}{9}$.

Bài 5. *(3,0 điểm)*

Cho tam giác ABC nhọn có $AB<AC$ và nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao *AM, BN, CP* cắt nhau tại *H*. Gọi *K, Q* lần lượt là giao điểm của *NP* với *AH* và *AO*, *I* là trung điểm của *AH*.

1. Chứng minh: $IN^2=IK.IM$.
2. Gọi *E* và *F* lần lượt là trung điểm của *BN* và *CP*. Chứng minh *EF* vuông góc với *QM*.

Lời giải.



1. Xét ΔANB và ΔAPC có $\widehat{BAC}$ chung; $\widehat{ANB}=\widehat{APC}=90^\circ \Rightarrow \Delta ANB \sim \Delta APC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AN}{AP}=\dfrac{AB}{AC}$ (1).

Xét ΔANP và ΔABC có (1) và $\widehat{BAC}$ chung $\Rightarrow \Delta ANB \sim \Delta APC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{ANP}=\widehat{ABC}$.

Tương tự ta có $\widehat{MNC}=\widehat{ABC} \Rightarrow \widehat{MNC}=\widehat{ANP} \Leftrightarrow 90^\circ-\widehat{MNC}=90^\circ-\widehat{ANP} \Leftrightarrow \widehat{PNH}=\widehat{MNH}$ (2).

Xét ΔANH vuông ở N có I là trung điểm $AK \Rightarrow IN=IA=IK$ hay ΔINH cân ở $I \Rightarrow \widehat{INH}=\widehat{IHN}$

$\Leftrightarrow \widehat{INK}+\widehat{KNH}=\widehat{IHN}$. Mà $\widehat{IHN}=\widehat{IMN}+\widehat{MNH}$ (góc ngoài của ΔMNH) $\Rightarrow \widehat{INK}+\widehat{KNH}=\widehat{IMN}+\widehat{MNH}$

.

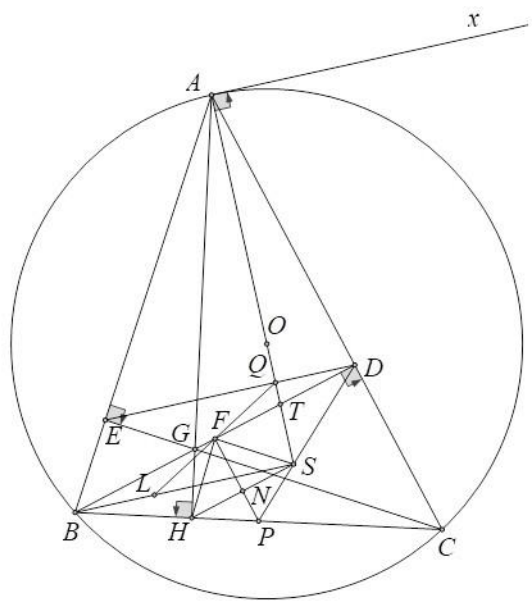
Kết hợp với (2) $\Rightarrow \widehat{INK}=\widehat{IMN}$ (3). Xét ΔINK và ΔIMN có (3) và $\widehat{MIN}$ chung

$\Rightarrow \Delta INK \sim \Delta IMN$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{IN}{IK}=\dfrac{IM}{IN} \Rightarrow IN^2=IK.IM$ (đpcm).

2. Trước hết, ta chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề: Cho tam giác ABC nhọn có $AB<AC$ và nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AH, BD, CE cắt nhau ở G. Gọi F là trung điểm BD, Q là giao điểm của AO và DE. Chứng minh rằng $QF=HF$.

Chứng minh:



Kẻ tiếp tuyến Ax (Tia Ax khác phía B với bờ AC). Qua B kẻ đường thẳng song song với DE, cắt AO tại S. Gọi P, T, L, N lần lượt là giao điểm của DS và BC, BD và AO, QF và BS, SH và PF.

Chứng minh tương tự câu 5.1 ta có $\widehat{ADE} = \widehat{ABC}$, mà $\widehat{xAD} = \widehat{ABC}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung)

$\Rightarrow \widehat{ADE} = \widehat{xAD}$ và ở vị trí so le trong $\Rightarrow Ax // DE$, mà $DE // BS$, $Ax \perp AO \Rightarrow DE \perp AO$; $BS \perp AO$.

Do $DE // BS \Rightarrow \dfrac{QF}{FL} = \dfrac{DF}{BF} = 1 \Rightarrow QF = LF$. Xét ΔQLS vuông ở S có $QF = LF \Rightarrow QF = LF = FS$ (1).

Xét ΔBTS và ΔATD có $\widehat{BTS} = \widehat{ATD}$ (hai góc đối đỉnh), $\widehat{BST} = \widehat{ADT} = 90^\circ \Rightarrow \Delta BTS \sim \Delta ATD$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{BT}{ST} = \dfrac{AT}{DT}$ (2), $\widehat{TBS} = \widehat{TAD}$ (3). Xét ΔBTA và ΔSTD có (2) và $\widehat{ATB} = \widehat{DTS}$ (hai góc đối đỉnh)

$\Rightarrow \Delta BTA \sim \Delta STD$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BAT} = \widehat{TDS}$ (4). Tương tự ta có: $\widehat{BSH} = \widehat{BAH}$ (5).

Dễ dàng nhận thấy rằng $\widehat{BAH} = \widehat{QAD}$ (6), kết hợp (3) và (5) $\Rightarrow \widehat{TBS} = \widehat{BSH}$ và ở vị trí so le trong $\Rightarrow BD //$ HS.

Xét ΔBPD có $BD // HS \Rightarrow \dfrac{HN}{SN} = \dfrac{BF}{DF} = 1$ (Áp dụng định lí Thales) $\Rightarrow HN = SN$ (7).

Từ (6), ta có: $\widehat{BAH} + \widehat{HAT} = \widehat{HAT} + \widehat{QAD} \Leftrightarrow \widehat{BAT} = \widehat{HAD}$, lại có $\widehat{DBC} = \widehat{HAC}$ $\left(\text{cùng phụ } \widehat{ACB}\right)$ và (4)

$\Rightarrow \widehat{DBC} = \widehat{TDS}$, từ đây dễ suy ra ΔBPD cân ở P, mà $BF = DF \Rightarrow PF \perp BD$.

Mà $BD // HS$ (Chứng minh trên) $\Rightarrow PF \perp HS$. Kết hợp với (7) $\Rightarrow PF$ là đường trung trực của HS $\Rightarrow HF = FS$.

Kết hợp với (1) $\Rightarrow QF = HF$ (đpcm).

Trở lại bài toán:

Áp dụng bổ đề trên vào ΔABC có E và F lần lượt là trung điểm của đường cao BN và đường cao CP

$\Rightarrow QE = ME$; $QF = MF \Rightarrow EF$ là đường trung trực của $QM \Rightarrow EF \perp QM$ (đpcm).

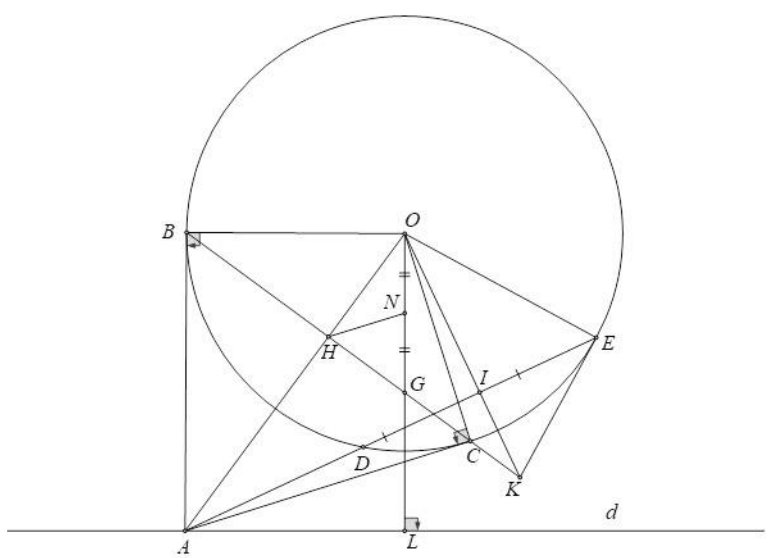
Bài 6. *(3,0 điểm)*

Cho đường thẳng (d) và đường tròn $(O;\ R)$ không giao nhau. Trên đường thẳng (d) lấy điểm A. Từ điểm A kẻ tiếp tuyến AB, AC với $(O;\ R)$, (B, C là tiếp điểm) và cát tuyến ADE không đi qua tâm O, (D nằm giữa A và E). Gọi I là trung điểm của DE. Đường thẳng BC cắt OA và OI lần lượt tại H và K.

1. Chứng minh rằng KE là tiếp tuyến của $(O;\ R)$.

2. Chứng minh rằng khi A di động trên (d) thì H di động trên một đường tròn cố định.

Lời giải.



1. Xét (O) có I là trung điểm của dây cung $DE \Rightarrow OI \perp DE$ hay $\widehat{OID} = 90^\circ$.

Theo tính chất tiếp tuyến ta có $AB = AC$, lại có $OB = OC = R \Rightarrow OA$ là đường trung trực của BC $\Rightarrow OA \perp BC$

Xét ΔOHK và ΔOIA có $\widehat{OID} = \widehat{OHK} = 90^\circ$; $\widehat{AOK}$ chung $\Rightarrow \Delta OHK \sim \Delta OIA$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{OH}{OK} = \dfrac{OI}{OA}$

$\Rightarrow OI.OK = OH.OA$ (1). Xét ΔOAC vuông ở C có đường cao $CH \Rightarrow OH.OA = OC^2 = R^2$.

Kết hợp với (1) $\Rightarrow OI.OK = R^2 = OE^2 \Rightarrow \dfrac{OI}{OE} = \dfrac{OE}{OK}$ (2). Xét ΔOEK và ΔOIE có (2) và $\widehat{EOK}$ chung

$\Rightarrow \Delta OEK \sim \Delta OIE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{OEK} = \widehat{OIE} = 90^\circ$, từ đây ta suy ra đpcm.

2. Kẻ $OL \perp (d)$ $(L \in (d))$, OL cắt BK ở G. Gọi N là trung điểm của OL.

Xét ΔOHG và ΔOLA có $\widehat{AOL}$ chung; $\widehat{OHG} = \widehat{OLA} = 90^\circ \Rightarrow \Delta OHG \sim \Delta OLA$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{OH}{OG} = \dfrac{OL}{OA}$

$\Rightarrow OH.OA = OG.OL$. Lại có $OH.OA = R^2 \Rightarrow OG.OL = R^2$ (3).

Do R cố định và (d) cố định $\Rightarrow OL$ cố định. Kết hợp các điều trên với (3) $\Rightarrow OG$ cố định.

Xét ΔOHG vuông ở H có N là trung điểm $OG \Rightarrow ON = GN = HN \Rightarrow H \in \left(N; \dfrac{OG}{2}\right)$.

Do OG cố định và N là trung điểm OG nên suy ra N cố định, từ đó ta có đpcm.

Bài 7. *(2,0 điểm)*

Cho a, b là các số nguyên, $a \neq -1$, $b \neq -1$ thỏa mãn: $\dfrac{(a-1)(a+1)^2 + (b-1)(b+1)^2}{a+b+ab+1}$ là số nguyên.

Chứng minh: $a^{2023}b^{2024} - a$ chia hết cho $a^2 + a$.

Lời giải. Điều cần chứng minh tương đương: $\left(a^{2022}b^{2024} - 1\right) \vdots (a+1) \Leftrightarrow \left(\left(a^{2022}b^{2024} - 1\right) + (a+1)\right) \vdots (a+1)$

$\Leftrightarrow \left(a^{2022}b^{2024} + a\right) \vdots (a+1) \Leftrightarrow a\left(a^{2021}b^{2024} + 1\right) \vdots (a+1) \Leftrightarrow \left(a^{2021}b^{2024} + 1\right) \vdots (a+1)$ (Do $(a, a+1) = 1$).

Cứ làm tương tự như vậy, cuối cùng điều cần chứng minh tương đương $\left(b^{2024} - 1\right) \vdots (a+1)$ (1).

Do $\dfrac{(a-1)(a+1)^2 + (b-1)(b+1)^2}{a+b+ab+1}$ là số nguyên $\Rightarrow \left((a-1)(a+1)^2 + (b-1)(b+1)^2\right) \vdots (a+b+ab+1)$

$\Leftrightarrow \left((a-1)(a+1)^2 + (b-1)(b+1)^2\right) \vdots (a+1)(b+1)$ (2).

Gọi $(a+1, b+1) = d$ (ĐK: $d \geq 1$) $\Rightarrow a+1 = dq; b+1 = dk$ (ĐK: $q, k \in \mathbb{N}^*; (q, k) = 1$)

$\Leftrightarrow a = dq - 1; b = dk - 1$.

Lúc này (2) trở thành $\left((dq-2)d^2q^2 + (dk-2)d^2k^2\right) \vdots dq.dk \Leftrightarrow \left((dq-2)q^2 + (dk-2)k^2\right) \vdots qk$.

Mà $qk \vdots q \Rightarrow \left((dq-2)q^2 + (dk-2)k^2\right) \vdots q \Leftrightarrow (dk-2)k^2 \vdots q$ (3). Vì $(q, k) = 1 \Rightarrow (q, k^2) = 1$.

Kết hợp với (3) $\Rightarrow (dk-2) \vdots q$ (4).

Do $a = dq - 1; b = dk - 1$ nên điều (1) tương đương: $\left((dk-1)^{2024} - 1\right) \vdots dq$ (5).

Ta lại có: $(dk-1)^{2024} - 1 = \left((dk-1)^2\right)^{1012} - 1 \vdots \left((dk-1)^2 - 1\right)$ (6).

Lại có: $(dk-1)^2 - 1 = \left((dk-1)+1\right)\left((dk-1)-1\right) = dk(dk-2) \vdots dkq$ (Do có (4)). Mà

$dkq \vdots dq \Rightarrow \left((dk-1)^2 - 1\right) \vdots dq$.

Kết hợp với (6) ta suy ra được điều (5) được chứng minh hay bài toán được chứng minh.

Vậy bài toán được chứng minh