SỞ GD&ĐT HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT ĐAN PHƯỢNG

Đề chính thức
(Đề thi có 1 trang)

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
MÔN: TOÁN
Năm học: 2018-2019
Thời gian làm bài: 120 phút
(Không kể thời gian giao đề)

Câu I (6 điểm)

1) Cho parabol $(P): y = 2x^2 + 6x - 1$;

Tìm giá trị của k để đường thẳng $\Delta: y = (k+6)x + 1$ cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt M, N sao cho trung điểm của đoạn thẳng MN nằm trên đường thẳng $d: y = -2x + \frac{3}{2}$

2) Giả sử phương trình bậc hai ẩn x (m là tham số): $x^2 - 2(m-1)x - m^3 + (m+1)^2 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1 + x_2 \le 4$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức sau:

$P = x_1^3 + x_2^3 + x_1x_2\left(3x_1 + 3x_2 + 8\right)$

Câu II (5điểm):

1) Giải bất phương trình: $(x+1)(x+4) \le 5\sqrt{x^2 + 5x + 28}$ $(x \in R)$

2) Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2y - 6 + 2\sqrt{2y+3} = 0 \\ (x-y)\left(x^2 + xy + y^2 + 3\right) = 3\left(x^2 + y^2\right) + 2 \end{cases}$ $(x; y \in R)$

Câu III (2 điểm). Cho $x > 0, y > 0$ là những số thay đổi thỏa mãn $\frac{2018}{x} + \frac{2019}{y} = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + y$

Câu IV(4 điểm)

1) Cho tam giác ABC có $BC = a, AC = b$ diện tích bằng S.

Tính số đo các góc của tam giác này biết $S = \frac{1}{4}\left(a^2 + b^2\right)$

2) Cho tam giác ABC là tam giác đều có độ dài cạnh bằng a. Trên các cạnh BC, CA, AB lần lượt lấy các điểm N, M, P sao cho $BN = \frac{a}{3}, CM = \frac{2a}{3}, AP = x\left(0 < x < a\right)$.

Tìm giá trị của x theo a để đường thẳng AN vuông góc với đường thẳng PM

Câu IV(3 điểm). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hình thang $ABCD$ với hai đáy là AB và CD. Biết diện tích hình thang bằng 14 (đơn vị diện tích), đỉnh $A(1;1)$ và trung điểm cạnh BC là $H\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

Viết phương trình tổng quát của đường thẳng AB biết đỉnh D có hoành độ dương và D nằm trên đường thẳng $d: 5x - y + 1 = 0$.

------------------Hết------------------

ĐÁP ÁN

Câu I:

Câu I **6 điểm**	**Nội dung**	**Điểm**
	Tìm m... với parabol $y = 2x^2 + 6x - 1$	
	Để đường thẳng cắt Parabol tại hai điểm phân biệt thì phương trình $2x^2 + 6x - 1 = 4x + 6x + 1$ có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ hay phương trình : $2x^2 - kx - 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ có $\Delta = k^2 + 16 > 0$	0.75
	Khi đó giao điểm $M\left(x_1; (k+6)x_1 + 1\right), N\left(x_2; (k+6)x_2 + 1\right)$ nên trung điểm của đoạn thẳng MN là $I\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{(x+6)x_1 + 1 + (x+6)x_2 + 1}{2}\right)$	0.75
	Theo định lý Viet ta có $x_1 + x_2 = \frac{k}{2}$ nên $I\left(\frac{k}{4}; \frac{2 + 3k + \frac{1}{2}k^2}{2}\right)$	0.75
	Do I thuộc đường thẳng $y = -2x + \frac{3}{2}$ nên $k^2 + 8k - 2 = 0$ hay $k = -4 \pm 3\sqrt{2}$ thì thỏa mãn bài toán.	0.75
2. **3 điểm**	Giả sử phương trình bậc hai ẩn x (m là tham số); $x^2 - 2(m-1)x - m^3 + (m+1)^2 = 0$ (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1 + x_2 \le 4$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức sau: $P = x_1^3 + x_2^3 + x_1x_2\left(3x_1 + 3x_2 + 8\right)$	
	Phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1 + x_2 \le 4$ khi $\begin{cases} \Delta' = (m-1)^2 + m^3 - (m+1)^2 \ge 0 \\ x_1 + x_2 = 2(m-1) \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^3 - 4m \ge 0 \\ m \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 \le m \le 0 \\ 2 \le m \le 3 \end{array}\right.$ (*).	0.75
	Với m thỏa mãn điều kiện (*), áp dụng Viet ta có :	0.75

	$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m-1) \\ x_1 \cdot x_2 = -m^3 + (m+1)^2 \end{cases}$ Nên $P = x_1^3 + x_2^3 + x_1x_2\left(3x_1 + 3x_2 + 8\right) = \left(x_1 + x_2\right)^3 + 8x_1x_2$ $= 8(m-1)^3 + 8\left(-m^3 + (m+1)^2\right)$ $= 8\left[-3m^2 + 3m - 1 + m^2 + 2m + 1\right] = 8\left[-2m^2 + 5m\right] = -16m^2 + 40m$	0.75
	Ta có bảng biến thiên hàm số trên miền điều kiện Ta có giá trị lớn nhất của P là 16 khi $m = 2$ Giá trị nhỏ nhất của P là -144 khi $m = -2$	0.75

Câu II

Câu II	**Nội dung**	**Điểm**
1. **2 điểm**	Đk: $x \in \mathbb{R}$ Ta có (1) $\Leftrightarrow x^2 + 5x + 28 - 24 - 5\sqrt{x^2 + 5x + 28} \le 0$	0.5
	Đặt $t = \sqrt{x^2 + 5x + 28} (t > 0)$ Bất phương trình trở thành $t^2 - 5t - 24 \le 0 \Leftrightarrow -3 \le t \le 8$	0.5
	So sánh điều kiện ta được $0 < t \le 8$	0.5
	Với $0 < t \le 8 \quad \Rightarrow x^2 + 5x + 28 \le 64 \Leftrightarrow -9 \le x \le 4$ KL đúng	0.5
2. **(3 điểm)**		
	ĐKXĐ: $y \ge -1,5$ (2) $\Leftrightarrow x^3 - y^3 + 3x - 3y = 3\left(x^2 + y^2\right) + 2 \Leftrightarrow (x-1)^3 = (y+1)^3$	0.5
	$\Leftrightarrow x - 1 = y + 1 \Leftrightarrow y = x - 2$	0.5

	Thay vào phương trình thứ nhất ta được; $x^2-3x+1=-\sqrt{2x-1}\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\sqrt{2x-1}-\frac{1}{2}\right)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{2x-1}=1-x\\\sqrt{2x-1}=x\end{array}\right.$ (Có thể bình phương được phương trình: $(x-1)^2\left(x^2-4x+2\right)=0$)	1.0
	Giải hai pt này ta được $x=1,x=2-\sqrt{2}$. Thử lại nghiệm... KL: Hệ phương trình có hai nghiệm là $(x;y)=(1;-1),(2-\sqrt{2},-\sqrt{2})$	1.0

Câu III

Câu III	**Nội dung**	**Điểm**
1. **2 điểm**	Có $\begin{aligned}P&=(x+y)\left(\frac{2018}{x}+\frac{2019}{y}\right)\\&=2018+\frac{2018y}{x}+\frac{2019x}{y}+2019\end{aligned}$	0.5
	Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho 2 số đương $\frac{2018y}{x}$ và $\frac{2019x}{y}$ ta được $\frac{2018y}{x}+\frac{2019x}{y}\geq 2\sqrt{2018.2019}$ Suy ra $P\geq(\sqrt{2018}+\sqrt{2019})^2$	0.5
	GTNN của P là $(\sqrt{2018}+\sqrt{2019})^2$ khi $\begin{cases}x>0;y>0\\\frac{2018}{x}+\frac{2019}{y}=10.5\\\frac{2018y}{x}=\frac{2019x}{y}\end{cases}$	0.5
	$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\sqrt{2018}(\sqrt{2018}+\sqrt{2019})\\y=\sqrt{2019}(\sqrt{2019}+\sqrt{2018})\end{cases}$	0,5

Câu IV

Câu IV	Nội dung	Điểm
1. **2 điểm**	Ta có $S=\frac{1}{4}\left(a^2+b^2\right)=\frac{1}{2}ab\sin C$	0,5
	$\Leftrightarrow\left(a^2+b^2\right)=2ab\sin C$ $\Leftrightarrow (a-b)^2+2ab(1-\sin C)=0 \quad (1)$	0,5
	Hai số hạng của tổng (1) đều không âm nên $\begin{cases}a-b=0\\1-\sin C=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a-b=0\\\sin C=1\end{cases}$	0,5
	$\Rightarrow\begin{cases}A=B=45^\circ\\C=90^\circ\end{cases}$ KL đúng	0,5
1. **2 điểm**	Ta có $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$	0,5
	Ta lại có $\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{x}{a}\overrightarrow{AB}$	0,5
	$AN\perp PM\Leftrightarrow\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{PM}=0\Leftrightarrow\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{x}{a}\overrightarrow{AB}\right)=0$ $\Leftrightarrow\frac{2}{9}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\frac{2x}{3a}\overrightarrow{AB}^2-\frac{x}{3a}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{1}{9}\overrightarrow{AC}^2=0$	0.5
	$\Leftrightarrow\frac{5x}{6a}=\frac{2}{9}\Leftrightarrow x=\frac{4a}{15}$. KL đúng	0.5

Câu V

Câu V	**Nội dung**	**Điểm**
3 điểm	Gọi $E = AH \cap DC$ Dễ thấy $\Delta HAB = \Delta HEC \Rightarrow S_{ADE} = S_{ABCD} = 14$	**0.5**
	$AH = \dfrac{\sqrt{13}}{2}, \mathrm{AE} = 2\mathrm{AH} = \sqrt{13}$, phương trình tổng quát của đường thẳng AE: $2x - 3y + 1 = 0$	0.5
	$D \in d \Rightarrow D(d; 5\mathrm{d}+1), d > 0$ $S_{ADE} = \dfrac{1}{2} AE \cdot d(D, AE) = 14 \Leftrightarrow d(D, AE) = \dfrac{28}{\sqrt{13}} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d = 2 \\ d = \dfrac{-30}{13} (L) \end{array}\right.$	0.5
	Suy ra $D(2;11)$ + H là trung điểm AE $\Rightarrow E(-2;-1)$	0.5
	Phương trình tổng quát của CD: $3x - y + 5 = 0$	0.5
	Đường thẳng AB đi qua A và song song với CD PT tổng quát của AB : $3x - y - 2 = 0$	0.5