

Bài 1. (4 điểm) Cho các đa thức sau:

$$P(x) = -2x + \frac{1}{2}x^2 + 3x^4 - 3x^2 - 3$$

$$Q(x) = 3x^4 + x^3 - 4x^2 + 1,5x^3 - 3x^4 + 2x + 1$$

a) Thu gọn và sắp xếp các đa thức trên theo thứ tự số mũ của biến giảm dần. Xác định bậc, hệ số cao nhất và hệ số tự do của các đa thức đã cho.

b) Xác định $P(x) + Q(x)$, $P(x) - Q(x)$.

c) Xác định đa thức $R(x)$ thỏa mãn $R(x) + P(x) - Q(x) + x^2 = 2x^3 - \frac{3}{2}x + 1$.

Bài 2. (2,5 điểm)

Cho đa thức $f(x) = x^3 + ax^2 - bx + 2$.

a) Cho $a = -\frac{1}{2}$ và $b = 4$. Chứng minh rằng $x = \frac{1}{2}$ là nghiệm của đa thức.

b) Biết đa thức đã cho nhận $x = 1$ và $x = -2$ là nghiệm. Tìm giá trị của a và b ?

c) Với đa thức tìm được ở câu b, hãy tìm giá trị của x thỏa mãn $f(x) = x + 2$.

Bài 3. (3 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A và có đường phân giác BD. Kẻ đường thẳng DH vuông góc với BC tại điểm H. Trên tia đối của tia AB lấy điểm K sao cho $AK = CH$.

a) Chứng minh rằng: $\triangle ABD = \triangle HBD$.

b) Chứng minh rằng: Đường thẳng BD là đường trung trực của đoạn thẳng AH và $AD < DC$

c) Chứng minh rằng: Ba điểm H, D, K thẳng hàng và đường thẳng BD vuông góc với đường thẳng KC.

d) Chứng minh rằng: $2(AD + AK) > CK$

Bài 4. (0,5 điểm)

Tìm tất cả các đa thức $f(x)$ có các hệ số nguyên thỏa mãn điều kiện:

$$(x + 1).f(x) = (x - 2).f(x+2) \text{ và } f(0) = 1$$

-----Hết-----

Chú ý: Học sinh không được sử dụng máy tính để làm bài