

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn: Toán

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: 22/12/2021

(Đề thi có 05 câu, gồm 01 trang)

Họ và tên thí sinh: .....Số báo danh:.....

Câu 1 (4,0 điểm).

a) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x(y^2 + z) = z(z + xy) \\ y(z^2 + x) = x(x + yz) \\ z(x^2 + y) = y(y + zx) \end{cases} \quad (x, y, z \in \mathbb{R}).$$

b) Cho các số thực dương  $a, b, c$  thỏa mãn  $a + b + c = 1$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b^{2021} + c^{2022} + 1} + \frac{b^2}{c^{2021} + a^{2022} + 1} + \frac{c^2}{a^{2021} + b^{2022} + 1} > \frac{1}{5}.$$

Câu 2 (4,0 điểm).

Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi  $u_1 = 3$  và

$$nu_{n+1} = 2(n+1)u_n - n - 2, \forall n \geq 1.$$

a) Chứng minh rằng mọi số hạng của dãy đều là số nguyên.

b) Chứng minh rằng với  $p$  là số nguyên tố lẻ bất kỳ, luôn tồn tại hai số hạng liên tiếp của dãy là bội của  $p$ .

Câu 3 (5,0 điểm).

Cho tam giác  $ABC$  nhọn, có  $AB < BC$ , nội tiếp đường tròn  $(O)$ , hai đường cao  $AE$  và  $CF$  cắt nhau tại  $H$  (với  $E \in BC, F \in AB$ ). Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $AC$ . Tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$  tại  $A$  và  $C$  cắt nhau tại  $Z$ . Gọi  $X$  là giao điểm của  $ZA$  và  $EF$ ,  $Y$  là giao điểm của  $ZC$  và  $EF$ . Đường tròn ngoại tiếp tam giác  $BEF$  cắt đường tròn  $(O)$  tại điểm  $D$  ( $D$  khác  $B$ ).

a) Chứng minh rằng 3 điểm  $M, H$  và  $D$  thẳng hàng.

b) Chứng minh rằng 4 điểm  $D, X, Z$  và  $Y$  cùng nằm trên một đường tròn.

Câu 4 (4,0 điểm).

Cho hàm số  $f$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn

$$|f(d) - f(a)| \geq 2022 |f(c) - f(b)|, \text{ với mọi dãy số } a, b, c, d \text{ là cấp số cộng.}$$

Chứng minh rằng  $f$  là hàm hằng.

Câu 5 (3,0 điểm).

Trong một tòa nhà có một số phòng nào đó, trong mỗi phòng có một bóng đèn và một công tắc, công tắc ở mỗi phòng được nối với một số phòng nào đó. Khi ta bấm công tắc tại một phòng thì sẽ làm thay đổi trạng thái của bóng đèn trong phòng đó và các phòng được nối với công tắc này (bóng đang sáng sẽ tắt còn bóng đang tắt sẽ sáng). Chứng minh rằng, nếu ban đầu tắt cả các bóng đèn đều tắt thì sau một số hữu hạn lần bấm công tắc sẽ làm cho tất cả các bóng đèn đều sáng.

----- HẾT -----

Lưu ý: - Thí sinh không được sử dụng tài liệu, máy tính cầm tay.  
- Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.