SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG THPT CHUYÊN
LÊ HỒNG PHONG

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI OLYMPIC TRUYỀN THỐNG 30 THÁNG 4
LẦN THỨ XXVII - NĂM 2023
Ngày thi: 08/4/2023
MÔN THI: **TOÁN**- KHỐI: **11**
THỜI GIAN: **180 phút**
Hình thức làm bài: Tự luận
*Đề thi có **01** trang*

Lưu ý: - Thí sinh làm mỗi câu trên một tờ giấy riêng và ghi rõ số thứ tự câu ở trang 1 của mỗi tờ giấy thi.
*- Thí sinh **không được** sử dụng máy tính cầm tay*

Câu 1. (3 điểm) Cho $a<b<c$ là ba nghiệm thực của phương trình $8x^3-4x^2-4x+1=0$.

a. Lập phương trình bậc ba có 3 nghiệm là $1-2a^2$, $1-2b^2$, $1-2c^2$.

b. Chứng minh rằng: $2a^2+b=2b^2+c=2c^2+a=1$.

Câu 2. (4 điểm) Cho dãy số (a_n) thỏa $\begin{cases} a_1=4 \\ a_{n+1}=3a_n+\sqrt{8a_n^2-28} \end{cases}$ với mọi số nguyên dương n.

a. Chứng minh (a_n) là dãy số nguyên dương.

b. Chứng minh tồn tại hai dãy số nguyên dương (x_n) và (y_n) thỏa $a_n=\dfrac{x_n^2+7}{2(x_n-y_n)}$ $\forall n\in\mathbb{Z}^+$.

Câu 3. (4 điểm) Cho p là số nguyên tố có dạng $20n+7$ Gọi S là tập hợp tất cả các số nguyên dương có thể biểu diễn dưới dạng a^2+5b^2 với a,b là hai số nguyên tố cùng nhau.

a. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương k sao cho $kp\in S$.

b. Tìm số nguyên dương k_0 nhỏ nhất sao cho $k_0p\in S$.

Câu 4. (5 điểm) Cho tam giác nhọn, không cân ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Các đường phân giác trong BX, CY của tam giác ABC cắt nhau tại I. J là trung điểm cung nhỏ BC của $(O;R)$. Đường thẳng XY cắt các đường thẳng AI, BC lần lượt tại L, T.

a. Chứng minh $\dfrac{LI}{LA}=\dfrac{BC}{BC+CA+AB}$ và $\dfrac{\sin YTA}{\sin YTB}=\dfrac{R}{IJ}$.

b. Chứng minh đường thẳng qua I vuông góc với XY cắt đường thẳng OJ tại điểm O' đối xứng với điểm O qua điểm J.

c. Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi G là điểm đối xứng của D qua đường thẳng EF. Biết các đường thẳng DL, AG cắt nhau tại W, chứng minh WI vuông góc với XY.

Câu 5. (4 điểm) Ký hiệu $(a_1,a_2,\ldots,a_{2023})$ là một hoán vị của tập hợp $X=\{1;2;\ldots;2023\}$ thỏa mãn tính chất $2(a_1+a_2+\ldots+a_k)$ chia hết cho k với mọi $k=1,2,\ldots,2023$.

a. Chứng minh $a_{2023}\in\{1,2023\}$.

b. Tính số các hoán vị trên.

---------------- **HẾT** ----------------

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ tên thí sinh: ....*SBD:*..............................
Trường: ....*Tỉnh/TP:* ....

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG THPT CHUYÊN
LÊ HỒNG PHONG

KỲ THI OLYMPIC TRUYỀN THỐNG 30 THÁNG 4
LẦN THỨ XXVII - NĂM 2023

ĐÁP ÁN CHÍNH THỨC

MÔN: **TOÁN** - KHỐI:**11**

Câu	Nội dung	Điểm
1	Cho $a<b<c$ là ba nghiệm thực của phương trình $8x^3-4x^2-4x+1=0$. ***a.*** Lập phương trình bậc ba có 3 nghiệm là $1-2a^2$, $1-2b^2$, $1-2c^2$. ***b.*** Chứng minh rằng: $2a^2+b=2b^2+c=2c^2+a=1$.	**3**
a.	Theo định lý Viet thì: $\begin{cases} a+b+c=\dfrac{1}{2} \\ ab+ac+bc=\dfrac{-1}{2} \\ abc=\dfrac{-1}{8} \end{cases}$	0.5
	$(1-2a^2)+(1-2b^2)+(1-2c^2)=3-2(a^2+b^2+c^2)=3-2\left(\dfrac{1}{4}-2.\dfrac{-1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$ $(1-2a^2)(1-2b^2)+(1-2b^2)(1-2c^2)+(1-2c^2)(1-2a^2)$ $=3-4(a^2+b^2+c^2)+4(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)=3-4.\dfrac{5}{4}+4\left(\dfrac{1}{4}-2.\dfrac{-1}{8}.\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{-1}{2}$ $(1-2a^2)(1-2b^2)(1-2c^2)=1-2(a^2+b^2+c^2)+4(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)-8a^2b^2c^2=\dfrac{-1}{8}$ Do đó $1-2a^2$, $1-2b^2$, $1-2c^2$ là 3 nghiệm của phương trình $8x^3-4x^2-4x+1=0$.	1
b.	Đặt $f(x)=8x^3-4x^2-4x+1$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Có $f\left(\dfrac{-3}{4}\right)=\dfrac{-13}{8}$, $f\left(\dfrac{-1}{2}\right)=1$, $f(0)=1$, $f\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{-1}{8}$, $f\left(\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{-7}{8}$ và $f(1)=1$ $\Rightarrow f\left(\dfrac{-3}{4}\right).f\left(\dfrac{-1}{2}\right)<0$, $f(0).f\left(\dfrac{1}{4}\right)<0$, $f\left(\dfrac{3}{4}\right).f(1)<0$ $\Rightarrow \dfrac{-3}{4}<a<\dfrac{-1}{2}$, $0<b<\dfrac{1}{4}$ và $\dfrac{3}{4}<c<1$	0.5
	Do đó $\lvert c\rvert>\dfrac{3}{4}>\lvert a\rvert \Rightarrow 1-2c^2<1-2a^2$ $\lvert a\rvert>\dfrac{1}{2}>\lvert b\rvert \Rightarrow 1-2a^2<1-2b^2 \Rightarrow 1-2c^2<1-2a^2<1-2b^2$	0.5
	Vì cũng là 3 nghiệm của phương trình trên nên $1-2c^2=a$, $1-2a^2=b$, $1-2b^2=c$. Vậy $2a^2+b=2b^2+c=2c^2+a=1$	0.5

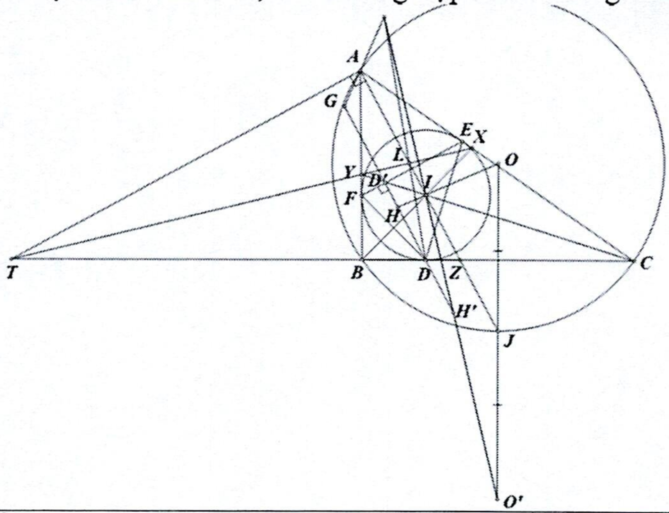
Câu	Nội dung	Điểm
2	Cho dãy số (a_n) thỏa $\begin{cases} a_1 = 4 \\ a_{n+1} = 3a_n + \sqrt{8a_n^2 - 28} \end{cases}$ với mọi số nguyên dương n. ***a.*** Chứng minh (a_n) là dãy số nguyên dương. ***b.*** Chứng minh tồn tại hai dãy số nguyên dương (x_n) và (y_n) thỏa $a_n = \dfrac{x_n^2 + 7}{2(x_n - y_n)}\ \forall n \in \mathbb{Z}^+$.	4
a.	Có $a_{n+1} \geq 3a_n \Rightarrow a_n \geq 12$ với mọi n nguyên dương $\Rightarrow 8a_n^2 - 28 > 0$ $a_{n+1} - 3a_n = \sqrt{8a_n^2 - 28} \Rightarrow (a_{n+1} - 3a_n)^2 = 8a_n^2 - 28 \Leftrightarrow a_{n+1}^2 - 6a_{n+1}.a_n + a_n^2 + 28 = 0$	0.5
	$\Rightarrow a_n^2 - 6a_n.a_{n-1} + a_{n-1}^2 + 28 = 0$ $\Rightarrow a_{n+1},\ a_{n-1}$ là 2 nghiệm thực của phương trình $t^2 - 6a_n.t + a_n^2 + 28 = 0$	0.5
	$\Rightarrow a_{n+1} + a_{n-1} = 6a_n \Leftrightarrow a_{n+1} = 6a_n - a_{n-1}$	0.5
	Mà $a_1 = 4$ và $a_2 = 22 \Rightarrow a_n$ nguyên với mọi $n \geq 3$ Vậy (a_n) là dãy số nguyên.	0.5
b.	Do a_1 và a_2 là số chẵn $\Rightarrow a_n$ là dãy số nguyên chẵn	0.5
	Chọn $x_n = \dfrac{a_n + a_{n-1}}{2}$ và $y_n = \dfrac{a_n - a_{n-1}}{2} \Rightarrow (x_n)$ và (y_n) là dãy số nguyên	0.5
	$\dfrac{x_n^2 + 7}{2(x_n - y_n)} = \dfrac{\left(\dfrac{a_n + a_{n-1}}{2}\right)^2 + 7}{2a_{n-1}} = \dfrac{a_n^2 + 2a_n.a_{n-1} + a_{n-1}^2 + 28}{8a_{n-1}} = \dfrac{6a_na_{n-1} + 2a_na_{n-1}}{8a_{n-1}} =$ $\dfrac{8a_na_{n-1}}{8a_{n-1}} = a_n$	1

Câu	Nội dung	Điểm
3	Cho p là số nguyên tố có dạng $20n+7$ Gọi S là tập hợp tất cả các số nguyên dương có thể biểu diễn dưới dạng a^2+5b^2 với a,b là hai số nguyên tố cùng nhau. ***a.*** Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương k sao cho $kp \in S$. ***b.*** Tìm số nguyên dương k_0 nhỏ nhất sao cho $k_0 p \in S$.	**4**
a.	$\left(\frac{-5}{p}\right) = -(-1)^{\frac{(5-1)(p-1)}{4}}\left(\frac{p}{5}\right) = -\left(\frac{2}{5}\right) = 1$ (vì $2^{\frac{5-1}{2}} \equiv -1 (\bmod 5)$)	1
	Suy ra $X^2 \equiv -5 (\bmod p)$ có nghiệm. Vậy tồn tại các số nguyên dương $a>1, k$ để $a^2+5.1^2 = kp$ Vậy $kp \in S$	1
b.	Xét tập $A = \left\{x+ay \mid 0 \le x, y \le \left[\sqrt{p}\right]\right\}$ Vì $\lvert A \rvert = \left(\left[\sqrt{p}\right]+1\right)^2 > p$ nên tồn tại hai phần tử x_1+ay_1; x_2+ay_2 cùng số dư khi chia cho p. ($(x_1;y_1) \ne (x_2;y_2)$) Suy ra $x_2 - x_1 \equiv a(y_2-y_1)(\bmod p)$ Đặt $x = \lvert x_2-x_1 \rvert ; y = \lvert y_2 - y_1 \rvert$ thì $x \equiv ay (\bmod p)$ và $0 < x, y < \sqrt{p}$ **Suy ra,** $x^2+5y^2 \equiv a^2y^2+5y^2 \equiv y^2\left(a^2+5\right) \equiv 0$ $(\bmod p)$	0.5
	Vì $x, y < \sqrt{p}$ **nên** $x^2+5y^2 < p+5p = 6p$. Kết hợp với $x^2+5y^2 \equiv 0 (\bmod p)$, suy ra $x^2+5y^2 \in \{p;2p;3p;4p;5p\}$	0.5
	+ *Nếu* $x^2+5y^2 = p$ thì $x^2+y^2 \equiv x^2+5y^2 \equiv p \equiv 3 (\bmod 4)$ (vô lý) + Nếu $x^2+5y^2 = 5p$ thì x, y chia hết cho 5 và $x^2+5y^2 = 5p$ chia hết 25 nên $p=5$ (mâu thuẫn giả thiết) + Nếu $x^2+5y^2 = 4p$ thì do bình phương số lẻ chia 4 dư 1 nên x, y phải là số chẵn. Đặt $x = 2x'; y = 2y'$ ta được $(x')^2 + 5(y')^2 = p$ (mâu thuẫn)	0.5
	+ Nếu $x^2+5y^2 = 3p$ (*) Suy ra, $(x-y)(x+y) \equiv x^2 - y^2 \equiv \left(x^2+5y^2\right) - 6y^2 \equiv 0 (\bmod 3)$ Chú ý đẳng thức sau $\left(\frac{x+5y}{3}\right)^2 + 5\left(\frac{x-y}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}\left(x^2+5y^2\right) = 2p$ $\left(\frac{x-5y}{3}\right)^2 + 5\left(\frac{x+y}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}\left(x^2+5y^2\right) = 2p$ Từ (*) thì $x+y$ hoặc $x-y$ chia hết cho 3 nên hoặc $\frac{x-5y}{3} = \frac{x+y}{3} - 2y; \frac{x+y}{3}$ là các số nguyên hoặc $\frac{x+5y}{3} = \frac{x-y}{3} + 2y; \frac{x-y}{3}$ là các số nguyên. Vậy tồn tại các số nguyên X, Y sao cho $X^2+5Y^2 = 2p$. Dễ chứng minh $(X,Y) = 1$. Suy ra $2p \in S$. Vậy $k_0 = 2$	0.5

<table>
<tr><th>Câu</th><th>Nội dung</th><th>Điểm</th></tr>
<tr><td>4</td><td>Cho tam giác nhọn, không cân ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Các đường phân giác trong BX, CY của tam giác ABC cắt nhau tại I. J là trung điểm cung nhỏ BC của $(O;R)$. Đường thẳng XY cắt các đường thẳng AI, BC lần lượt tại L, T.

a. Chứng minh $\dfrac{LI}{LA}=\dfrac{BC}{BC+CA+AB}$ và $\dfrac{\sin YTA}{\sin YTB}=\dfrac{R}{IJ}$.

b. Chứng minh đường thẳng qua I vuông góc với XY cắt đường thẳng OJ tại điểm O' đối xứng với điểm O qua điểm J.

c. Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi G là điểm đối xứng của D qua đường thẳng EF. Biết các đường thẳng DL, AG cắt nhau tại W, chứng minh WI vuông góc với XY.</td><td>5</td></tr>
<tr><td></td><td>Giả sử các điểm có vị trí như hình vẽ, các trường hợp khác chứng minh tương tự.

</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">a.</td><td>Gọi Z là giao điểm của AJ và BC. Ta có $(A,I,L,Z)=-1$ nên
$$\frac{LI}{LA}=\frac{ZI}{ZA}=\frac{1}{1+\frac{IA}{IZ}}=\frac{1}{1+\frac{BA}{BZ}}=\frac{1}{1+\frac{BA+CA}{BC}}=\frac{BC}{BC+CA+AB}.$$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Ta có $(T,Z,B,C)=-1$ và $\widehat{ZAB}=\widehat{ZAC}$ nên $\widehat{ZAT}=90^\circ$. Suy ra
$$\frac{\sin YTA}{\sin YTB}=\frac{YA}{YB}.\frac{\sin YAT}{\sin YBT}=\frac{CA}{CB}.\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin B}=\frac{1}{2\sin\frac{A}{2}} \text{ và } \frac{R}{IJ}=\frac{R}{JB}=\frac{BC}{2\sin A}:\frac{\frac{BC}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{1}{2\sin\frac{A}{2}}.$$
Suy ra $\dfrac{\sin YTA}{\sin YTB}=\dfrac{R}{IJ}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>b.</td><td>Gọi O_1 là giao điểm của của đường thẳng qua I vuông góc với XY với đường thẳng OJ.
Ta có $JO_1=JI.\dfrac{\sin JIO_1}{\sin JO_1I}=JI.\dfrac{\sin YTA}{\sin YTB}=R$. Suy ra $O_1\equiv O'$, đpcm</td><td>1</td></tr>
<tr><td>c.</td><td>Gọi H là trực tâm của tam giác DEF. Ta có IH, IO lần lượt là đường thẳng Euler của 2 tam giác có các cạnh tương ứng song song là ΔDEF và Δ có 3 đỉnh là các tâm đường tròn bàng tiếp của ΔABC. Suy ra O, I, H thẳng hàng.</td><td>0.5</td></tr>
</table>

	Gọi H' là giao điểm của HD với IO'. Ta có $ID \parallel OO'$ và $JO = JO'$ nên $I(O, O', J, D) = -1$. Chú ý $IJ \parallel HH'$ nên $DH' = DH$.	0.5
	Ta có $$\frac{DH'}{DG} = \frac{DH}{DG} = \frac{\sin DEH}{\sin DEG} \cdot \frac{\sin EGD}{\sin EHD} = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\sin B} \cdot \frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} = \frac{\sin A}{\sin A + 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}} = \frac{LI}{LA}.$$	0.5
	Kết hợp với $AI \parallel GH'$ và Định lý Ta-lét ta có W, I, H' thẳng hàng. Chú ý $IO' \perp XY$ được đpcm	0.5

Câu	Nội dung	Điểm
5	Ký hiệu $(a_1, a_2, ..., a_{2023})$ là một hoán vị của tập hợp $X = \{1; 2; ...; 2023\}$ thỏa mãn tính chất $2(a_1 + a_2 + ... + a_k)$ chia hết cho k với mọi $k = 1, 2, ..., 2023$. ***a.*** Chứng minh $a_{2023} \in \{1, 2023\}$. ***b.*** Tính số các hoán vị trên.	4
a.	Đặt $n = 2023$. Ta có $2(a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}) = 2(a_1 + a_2 + ... + a_n) - 2a_n = 2(1 + 2 + ... + n) - 2a_n$ $= n(n+1) - 2a_n = (n+2)(n-1) + (2 - 2a_n)$ và $2(a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}) \vdots (n-1) \Rightarrow 2 - 2a_n \vdots (n-1)$ Do $1 \le a_n \le n \Rightarrow 0 \le 2(a_n - 1) \le 2n - 2$ $\Rightarrow 2(a_n - 1) = 0$ hay $2(a_n - 1) = n - 1$ hay $2(a_n - 1) = 2(n-1)$ $\Rightarrow a_n = 1$ hay $a_n = n$ hay $a_n = \frac{n+1}{2}$ (với n lẻ).	1
	Nếu $a_n = \frac{n+1}{2}$ và n là số lẻ thì ta có $2(a_1 + a_2 + ... + a_{n-2}) = 2(a_1 + a_2 + ... + a_n) - 2a_{n-1} - 2a_n = 2(1 + 2 + ... + n)$ $-2a_{n-1} - (n+1) = (n-2)(n+2) + (3 - 2a_{n-1})$ và $2(a_1 + a_2 + ... + a_{n-2}) \vdots (n-2)$ $\Rightarrow 2a_{n-1} - 3 \vdots (n-2)$. Ta lại có $-1 \le 2a_{n-1} - 3 \le 2n - 3 < 3n - 6 = 3(n-2)$ với $n > 3$. Do đó $2a_{n-1} - 3 = n - 2$ hay $2a_{n-1} - 3 = 2(n-2)$ (loại do VT lẻ VP chẵn) $\Rightarrow a_{n-1} = \frac{n+1}{2} = a_n$ (vô lý) Vậy $a_n = 1, a_n = n$. Do đó $a_{2023} \in \{1; 2023\}$	1
	Gọi S_n là tập hợp các hoán vị thỏa yêu cầu bài toán. Gọi A_n là tập hợp các hoán vị thỏa mãn yêu cầu bài toán có $a_n = 1$. Gọi B_n là tập hợp các hoán vị thỏa mãn yêu cầu bài toán có $a_n = n$. Ta có $(a_1, a_2, ..., a_{n-1}, n) \in B_n$ thì $(a_1, a_2, ..., a_{n-1})$ là hoán vị thỏa yêu cầu bài toán nên ta được $\lvert B_n \rvert = \lvert S_{n-1} \rvert$.	0.5
	Ta xét ánh xạ $f : A_n \to S_{n-1}$ $(a_1, a_2, ..., a_{n-1}, 1) \to (a_1 - 1, a_2 - 1, ..., a_{n-1} - 1)$ Ta dễ chứng minh f là một song ánh nên ta suy ra $\lvert A_n \rvert = \lvert S_{n-1} \rvert$.	0.5
	Do đó ta có $\lvert S_n \rvert = \lvert A_n \rvert + \lvert B_n \rvert = 2\lvert S_{n-1} \rvert$. Từ đó suy ra $\lvert S_n \rvert = \lvert S_3 \rvert.2^{n-3}$	0.5
	Ta có $\lvert S_1 \rvert = 1, \lvert S_2 \rvert = 2$, $\lvert S_3 \rvert = 3!$. Suy ra $S_n = 3.2^{n-2} = 3.2^{2021}$	0.5