SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI OLYMPIC TRUYỀN THỐNG 30 THÁNG 4
LẦN THỨ XXVII - NĂM 2023

Ngày thi: 08/4/2023
MÔN THI: **TOÁN** - KHỐI: **10**
THỜI GIAN: **180 phút**
Hình thức làm bài: Tự luận
*Đề thi có **01** trang*

Lưu ý: - Thí sinh làm mỗi câu trên một tờ giấy riêng và ghi rõ số thứ tự câu ở trang 1 của mỗi tờ giấy thi.
*- Thí sinh **không được** sử dụng máy tính cầm tay.*

Câu 1. (4 điểm) Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x(x+y) = y(y+z) = z(z+x) \neq 0$. Chứng minh

a. $\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{z}+\dfrac{z^2}{x}=x+y+z.$

b. $4\left(\dfrac{x^2}{yz}+\dfrac{y^2}{zx}+\dfrac{z^2}{xy}\right)-\left(\dfrac{x^3}{y^3}+\dfrac{y^3}{z^3}+\dfrac{z^3}{x^3}\right)=9.$

Câu 2. (3 điểm) Gọi S là tập hợp các số nguyên n $(n>1)$ sao cho với n số thực bất kỳ thuộc khoảng $(-2;2)$ có tổng bằng 0 thì tổng lũy thừa bậc 4 của chúng luôn nhỏ hơn 32. Chứng minh $S=\{2;3\}$.

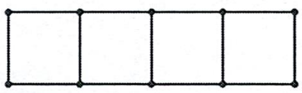
Câu 3. (4 điểm)

a. Tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x;y)=2^x-5^y$ với $x;y$ là 2 số nguyên dương thỏa mãn $2^x \geq 5^y$.

b. Tìm tất cả các số nguyên dương N có đúng 2 ước nguyên tố là 2 và 5, đồng thời $N+4$ là số chính phương.

Câu 4. (4 điểm)

a. Cho 4 hình vuông đơn vị xếp kề nhau như hình vẽ. Có bao nhiêu cách tô màu 10 đỉnh của các hình vuông đơn vị bởi k màu khác nhau (mỗi đỉnh tô 1 màu) sao cho không có hai đỉnh kề nhau nào cùng màu khi $k=3$? $k=10$? (trong hình vẽ có tất cả 13 cặp đỉnh kề nhau)



b. Có bao nhiêu cách tô màu 8 đỉnh của hình lập phương bởi 3 màu khác nhau (mỗi đỉnh tô 1 màu) sao cho không có hai đỉnh kề nhau nào cùng màu? (trong hình lập phương có tất cả 12 cặp đỉnh kề nhau)

Câu 5. (5 điểm) Cho tam giác nhọn không cân ABC có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F.

a. Gọi H là hình chiếu của D lên EF. Chứng minh HD là phân giác $\widehat{BHC}$.

b. Gọi P là giao điểm của BE, CF và L là giao điểm của AI, EF. Gọi H' là điểm đối xứng với H qua L. Chứng minh DH' song song với PL.

c. Gọi M là điểm đối xứng với F qua B và N là điểm đối xứng với E qua C. Chứng minh $\dfrac{\sin\widehat{DNM}}{\sin\widehat{DMN}}=\dfrac{\sin\widehat{H'DE}}{\sin\widehat{H'DF}}$ và PL vuông góc với MN.

---------------- **HẾT** ----------------

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ tên thí sinh: ....SBD:..
Trường: ....Tỉnh/TP: ....

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG THPT CHUYÊN
LÊ HỒNG PHONG

KỲ THI OLYMPIC TRUYỀN THỐNG 30 THÁNG 4
LẦN THỨ XXVII - NĂM 2023

ĐÁP ÁN CHÍNH THỨC

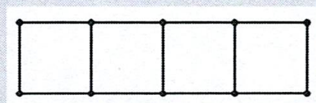
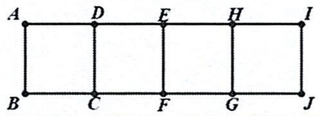
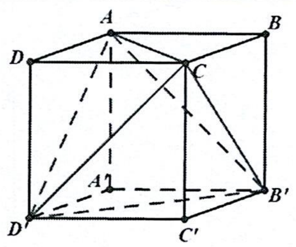
MÔN: **TOÁN** - KHỐI: **10**

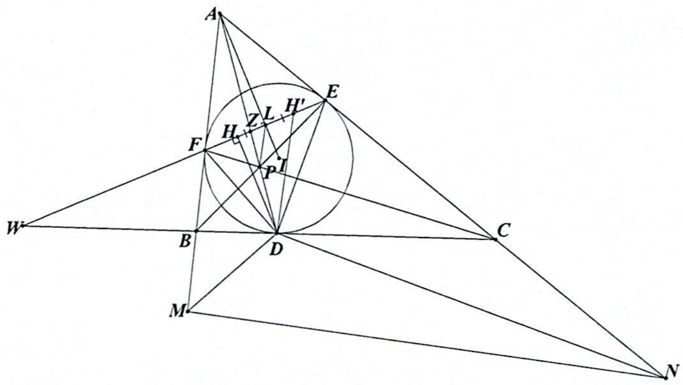
Lưu ý: Các bước giải đúng nhưng khác đáp án đều cho điểm tương ứng.

Câu	Nội dung	Điểm
1	**Câu 1.** Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x(x+y)=y(y+z)=z(z+x)\neq 0.$ Chứng minh ***a.*** $\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{z}+\dfrac{z^2}{x}=x+y+z.$ ***b.*** $4\left(\dfrac{x^2}{yz}+\dfrac{y^2}{zx}+\dfrac{z^2}{xy}\right)-\left(\dfrac{x^3}{y^3}+\dfrac{y^3}{z^3}+\dfrac{z^3}{x^3}\right)=9.$	**4,0**
a.	Từ giả thiết suy ra $xyz\neq 0$ và $x^2=y(y+z)-xy.$ Do đó $\dfrac{x^2}{y}=y+z-x.$	1,0
	Tương tự ta có $\dfrac{y^2}{z}=z+x-y$ và $\dfrac{z^2}{x}=x+y-z.$ Suy ra $\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{z}+\dfrac{z^2}{x}=x+y+z.$	1,0
b.	Đặt $P=4\left(\dfrac{x^2}{yz}+\dfrac{y^2}{zx}+\dfrac{z^2}{xy}\right)-\left(\dfrac{x^3}{y^3}+\dfrac{y^3}{z^3}+\dfrac{z^3}{x^3}\right).$ **Trường hợp 1:** Khi $(x-y)(y-z)(z-x)=0$ thì từ giả thiết ta có $x=y=z.$ Khi đó $P=9,$ đpcm.	0,5
	Trường hợp 2: Khi $(x-y)(y-z)(z-x)\neq 0.$ Ta có $(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)=\dfrac{x^2}{y}.\dfrac{y^2}{z}.\dfrac{z^2}{x}=xyz.$ Suy ra $x^3+y^3+z^3+3xyz=x^2y+y^2z+z^2x+xy^2+yz^2+zx^2.$	0,5
	Ta cũng có $\left(\dfrac{x^2}{y}-y\right)\left(\dfrac{y^2}{z}-z\right)\left(\dfrac{z^2}{x}-x\right)=(z-x)(x-y)(y-z).$ Suy ra $(x+y)(y+z)(z+x)=xyz.$ Do đó $x^2y+y^2z+z^2x+xy^2+yz^2+zx^2=-xyz.$ Do vậy $x^3+y^3+z^3+3xyz=-xyz.$ Suy ra $\dfrac{x^2}{yz}+\dfrac{y^2}{zx}+\dfrac{z^2}{xy}=\dfrac{x^3+y^3+z^3}{xyz}=-4.$	0,5
	Ta có $\dfrac{x^3}{y^3}+\dfrac{y^3}{z^3}+\dfrac{z^3}{x^3}=3+\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}\right)\left(\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{z^2}+\dfrac{z^2}{x^2}-\dfrac{y}{x}-\dfrac{z}{y}-\dfrac{x}{z}\right).$ Lại có $\left(\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{z}+\dfrac{z^2}{x}\right)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)=(x+y+z)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)$ nên $\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{z^2}+\dfrac{z^2}{x^2}-4=3+\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}+\dfrac{x}{z}.$ Mặt khác $\dfrac{x^2}{y^2}=1+\dfrac{z-x}{y};\dfrac{y^2}{z^2}=1+\dfrac{x-y}{z};\dfrac{z^2}{x^2}=1+\dfrac{y-z}{x}$ nên $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}=-4.$ Suy ra $\dfrac{x^3}{y^3}+\dfrac{y^3}{z^3}+\dfrac{z^3}{x^3}=3+(-4).7=-25.$ Do vậy $P=4(-4)-(-25)=9,$ đpcm.	0,5

2	Gọi S là tập hợp các số nguyên n $(n>1)$ sao cho với n số thực bất kỳ thuộc khoảng $(-2;2)$ có tổng bằng 0 thì tổng lũy thừa bậc 4 của chúng luôn nhỏ hơn 32. Chứng minh $S=\{2;3\}$.	**3,0**
	Gọi các số thực đang xét là $a_1,...,a_n$ thì $a_1,...,a_n \in (-2;2)$ và $a_1+...+a_n=0$. - Với $n=2$ thì $a_1^4<16, a_2^4<16$ nên $a_1^4+a_2^4<32$. Suy ra $2\in S$.	1,0
	- Với $n=3$, giả sử $a_1a_2\ge 0$ (do trong 3 số cho trước sẽ có ít nhất 2 số có tích không âm). Ta có $a_1^4+a_2^4+a_3^4<a_1^4+a_2^4+16\le (a_1+a_2)^4+16=(-a_3)^4+16=a_3^4+16<32.$ Suy ra $3\in S$.	1,0
	- Với $n\ge 4$ thì chọn $a_1=a_3=-a_2=-a_4=\sqrt[4]{8}$ và các số còn lại (nếu có) bằng 0, ta có $a_1^4+...+a_n^4=32$. Suy ra $n\notin S$ với mọi số nguyên dương $n\ge 4$. Vậy $S=\{2;3\}$.	1,0

3	***a.*** Tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x;y)=2^x-5^y$ với $x;y$ là 2 số nguyên dương thỏa mãn $2^x \ge 5^y$. ***b.*** Tìm tất cả các số nguyên dương N có đúng 2 ước nguyên tố là 2 và 5, đồng thời $N+4$ là số chính phương.	**4,0**
a) (1,5đ)	a) Với x,y là 2 số nguyên dương bất kỳ thỏa mãn $2^x \ge 5^y$. Ta có $f(x;y)\ge 0$. Nếu $f(x;y)=0$ thì $2^x=5^y$, vô lý.	0,5
	Nếu $f(x;y)=1$ thì $2^x-5^y=1$. Suy ra $x\ge 3; 5^y=2^x-1\equiv 3 \pmod 4$, vô lý. Nếu $f(x;y)=2$ thì $2^x-5^y=2$, vô lý do 5^y lẻ.	0,5
	Do $f(3;1)=3$ nên giá trị nhỏ nhất của $f(x;y)$ cần tìm là 3.	0,5
b) (2,5đ)	Đặt $N=2^a5^b$ và $N+4=m^2$ với $a,b,m\in\mathbb{N}^*$. Khi đó $(m-2)(m+2)=N$. Do $a\ge 1$ nên $N \,\vdots\, 2$. Do đó m chẵn (do m^2 chẵn), suy ra $N \,\vdots\, 4$. Do vậy $a\ge 2$. Đặt $m=2k, k\in\mathbb{N}^*$ ta được $(k-1)(k+1)=2^{a-2}5^b$. Xét các trường hợp sau: ▪ Nếu $a=2$ thì $(k-1)(k+1)=5^b$. Suy ra $\begin{cases} k-1=5^x; k+1=5^y \\ x+y=b; x<y; x,y\in\mathbb{N}. \end{cases}$ Suy ra $2=5^x\left(5^{y-x}-1\right)$, vô nghiệm do $5^{y-x}\equiv 1 \pmod 4$.	0,5
	▪ Nếu $a\ge 3$ thì $(k-1)(k+1) \,\vdots\, 2$. Suy ra k lẻ và $k\ge 3$ (do $2^{a-2}5^b\ge 10$). Đặt $p=\dfrac{k-1}{2}$ và $q=\dfrac{k+1}{2}$ thì $p,q\in\mathbb{N}^*; q-p=1$ và $pq=2^{a-4}5^b$. Do $(p,q)=1$ nên $p,q\in\left\{2^{a-4};5^b\right\}$.	0,5
	Đặt $a-4=t$ thì $t\in\mathbb{N}$ do $p,q\in\mathbb{N}^*$. o Nếu $\begin{cases} p=5^b \\ q=2^t \end{cases}$ thì $2^t-5^b=1$, vô nghiệm theo câu a (chú ý $t=0$ không thỏa mãn).	0,5
	o Nếu $\begin{cases} p=2^t \\ q=5^b \end{cases}$ thì $5^b-2^t=1$. Suy ra $t\ge 2$ và b lẻ, t chẵn (do $(-1)^b=(-1)^t+1 \pmod 3$). Do đó $5^b=5^{2s+1}\equiv 5 \pmod 8$. Suy ra $2^t=5^b-1\equiv 4 \pmod 8$. Do vậy $t=2$ và $b=1$. Vậy $b=1, a=6$ và số nguyên dương cần tìm là $N=320$.	1,0

Bài 4	***a.*** Cho 4 hình vuông đơn vị xếp kề nhau như hình vẽ. Có bao nhiêu cách tô màu 10 đỉnh của các hình vuông đơn vị bởi k màu khác nhau (mỗi đỉnh tô 1 màu) sao cho không có hai đỉnh kề nhau nào cùng màu khi $k=3$? $k=10$? (trong hình vẽ có tất cả 13 cặp đỉnh kề nhau)  ***b.*** Có bao nhiêu cách tô màu 8 đỉnh của hình lập phương bởi 3 màu khác nhau (mỗi đỉnh tô 1 màu) sao cho không có hai đỉnh kề nhau nào cùng màu? (trong hình lập phương có tất cả 12 cặp đỉnh kề nhau)	**4,0**
	 	
	Với $k=3$. Số cách tô màu đỉnh A là 3. Số cách tô màu 3 đỉnh B,C,D sao cho 2 đỉnh B,D cùng màu là 2×2. Số cách tô màu 3 đỉnh B,C,D sao cho 2 đỉnh B,D khác màu là 2×1.	0,5
a) (2,0đ)	Số cách tô màu 6 đỉnh E,F,G,H,I,J là 3^3. Vậy số cách tô màu cần tìm khi $k=3$ là $3\times(2\times 2+2\times 1)\times 3^3=486$.	0,5
	Với $k=10$. Số cách tô màu đỉnh A là 10. Số cách tô màu 3 đỉnh B,C,D sao cho 2 đỉnh B,D cùng màu là $9\times 1\times 9$. Số cách tô màu 3 đỉnh B,C,D sao cho 2 đỉnh B,D khác màu là $9\times 8\times 8$.	0,5
	Số cách tô màu 6 đỉnh E,F,G,H,I,J là $(1\times 9+8\times 8)^3$. Vậy số cách tô màu cần tìm khi $k=10$ là $10\times(81+72\times 8)\times 73^3=2555841690$.	0,5
	 	
	Trường hợp 1: Các đỉnh A,C,B',D' được tô bởi 1 màu. Số cách chọn 1 màu để tô các đỉnh A,C,B',D' là 3. Số cách tô màu các đỉnh còn lại là 2^4. Vậy số cách tô thỏa mãn là $3.2^4=48$.	1,0
b) (2,0đ)	Trường hợp 2: Các đỉnh A,C,B',D' được tô bởi 2 màu. Số cách chọn 2 trong 3 màu để tô các đỉnh A,C,B',D' là C_3^2. Số cách tô màu các đỉnh A,C,B',D' bằng 2 màu sao cho có 3 đỉnh cùng màu là 4×2. Khi đó, số cách tô màu các đỉnh còn lại là 2×1^3.	0,5
	Số cách tô màu các đỉnh A,C,B',D' bằng 2 màu sao cho có 2 cặp đỉnh mà mỗi cặp đỉnh cùng màu là 3×2. Số cách tô màu các đỉnh còn lại là 1^4. Vậy số cách tô thỏa mãn là $$C_3^2\times\left[4\times 2\times(2\times 1^3)+3\times 2\times 1^4\right]=66.$$ Tóm lại, tổng số cách tô thỏa mãn yêu cầu bài toán là $48+66=114$.	0,5

5	Cho tam giác nhọn không cân ABC có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. ***a.*** Gọi H là hình chiếu của D lên EF. Chứng minh HD là phân giác $\widehat{BHC}$. ***b.*** Gọi P là giao điểm của BE, CF và L là giao điểm của AI, EF. Gọi H' là điểm đối xứng với H qua L. Chứng minh DH' song song với PL. ***c.*** Gọi M là điểm đối xứng với F qua B và N là điểm đối xứng với E qua C. Chứng minh $\frac{\sin\widehat{DNM}}{\sin\widehat{DMN}} = \frac{\sin\widehat{H'DE}}{\sin\widehat{H'DF}}$ và PL vuông góc với MN.	**5,0**
	Giả sử các điểm có vị trí như hình vẽ, các trường hợp khác chứng minh tương tự.  	
a) (1,0đ)	Gọi W là giao điểm của FE, BC. Theo Định lý Ceva thì AD, BE, CF đồng quy.	0,5
	Suy ra $(W, D, B, C) = -1$. Lại có $HD \perp HW$ nên HD là phân giác $\widehat{BHC}$.	0,5
b) (2,0đ)	Theo câu a ta có A, P, D thẳng hàng. Gọi Z là giao điểm của FE, AD. Ta có $E(W, D, B, C) = -1$ nên $(A, P, Z, D) = -1$.	0,5
	Suy ra $(LA, LP, LH, LD) = -1$.	0,5
	Lại có $LA \parallel HD$ nên LP đi qua trung điểm HD.	0,5
	Suy ra DH' song song với PL (do L là trung điểm của HH').	0,5
c) (2,0đ)	Ta có $\frac{\sin\widehat{DNM}}{\sin\widehat{DMN}} = \frac{DM}{DN} = \frac{DB}{DC}\frac{\cos(B/2)}{\cos(C/2)} = \frac{\cot(B/2)}{\cot(C/2)}.\frac{\cos(B/2)}{\cos(C/2)}$ và	0,5
	$$\frac{\sin\widehat{H'DE}}{\sin\widehat{H'DF}} = \frac{H'E}{H'F}.\frac{\sin\widehat{DEF}}{\sin\widehat{DFE}} = \frac{HF}{HE}.\frac{\cos(B/2)}{\cos(C/2)}$$ $$= \frac{\cot\widehat{DFE}}{\cot\widehat{DEF}}.\frac{\cos(B/2)}{\cos(C/2)} = \frac{\tan(C/2)}{\tan(B/2)}.\frac{\cos(B/2)}{\cos(C/2)}.$$ Suy ra $\frac{\sin\widehat{DNM}}{\sin\widehat{DMN}} = \frac{\sin\widehat{H'DE}}{\sin\widehat{H'DF}}$.	0,5
	Chú ý $\widehat{DNM} + \widehat{DMN} = \widehat{H'DE} + \widehat{H'DF} = \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2} < 90^\circ$. Nếu $\widehat{DNM} > \widehat{H'DE}$ thì $\widehat{DMN} < \widehat{H'DF}$. Khi đó $\frac{\sin\widehat{DNM}}{\sin\widehat{DMN}} > \frac{\sin\widehat{H'DE}}{\sin\widehat{H'DF}}$, loại.	0,5
	Nếu $\widehat{DNM} < \widehat{H'DE}$ thì $\widehat{DMN} > \widehat{H'DF}$. Khi đó $\frac{\sin\widehat{DNM}}{\sin\widehat{DMN}} < \frac{\sin\widehat{H'DE}}{\sin\widehat{H'DF}}$, loại. Do vậy $\widehat{DNM} = \widehat{H'DE}$. Suy ra $DH' \perp MN$. Do vậy $PL \perp MN$, đpcm.	0,5