TRƯỜNG THPT HÀ VĂN MAO	ĐỀ THI GIAO LƯU KSCL HSG - CỤM BÁ THƯỚC
	NĂM HỌC 2022 - 2023
ĐỀ CHÍNH THỨC	Môn thi: Toán - THPT
Đề thi có 7 trang, 50 câu TNKQ	*Khóa thi ngày: 12/11/2022*
	Thời gian làm bài: 90 phút (không kể thời gian phát đề)

Họ và tên………………….………………………..

Số báo danh…………………..……. Phòng thi……..

Mã đề thi: 123

Câu 1. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào là hàm số chẵn?

A. $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$. **B.** $y=\sin x$. **C.** $y=\sin x+\tan x$. **D.** $y=\sin x.\cos x$

Câu 2. Một học sinh có 4 quyển sách Toán khác nhau và 5 quyển sách Ngữ văn khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách xếp 9 quyển sách trên giá sao cho hai quyển sách kề nhau phải khác loại ?

A. 20. **B.** 2880. **C.** 362880. **D.** 5760.

Câu 3. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1=6$; $d=9$. Khi đó số 2022 là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số?

A. 226 . **B.** 225. **C.** 223. **D.** 224.

Câu 4. Tìm m để hàm số $y=(m-1)x^4+(2m-1)x^2+1$ có đúng 3 điểm cực trị.

A. $\frac{1}{2}<m<1$. **B.** $\frac{1}{2}\le m<1$. **C.** $\frac{1}{2}<m\le 1$. **D.** $\frac{1}{2}\le m\le 1$.

Câu 5. Đặt $a=\ln 2, b=\ln 5$, hãy biểu diễn $I=\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{2}{3}+\ln\frac{3}{4}+...+\ln\frac{98}{99}+\ln\frac{99}{100}$ theo a và b.

A. $I=-2(a+b)$ **B.** $I=-2(a-b)$ **C.** $I=2(a+b)$ **D.** $I=2(a-b)$

Câu 6. Lăng trụ đứng có đáy là hình thoi có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 2. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 5.

Câu 7. Cho đoạn thẳng AB có độ dài bằng $2a$, vẽ tia Ax về phía điểm B sao cho điểm B luôn cách tia Ax một đoạn bằng a. Gọi H là hình chiếu của B lên tia Ax, khi tam giác AHB quay quanh trục AB thì đường gấp khúc AHB vẽ thành mặt tròn xoay có diện tích xung quanh bằng:

A. $\frac{3\sqrt{2}\pi a^2}{2}$. **B.** $\frac{(3+\sqrt{3})\pi a^2}{2}$. **C.** $\frac{(1+\sqrt{3})\pi a^2}{2}$. **D.** $\frac{(2+\sqrt{2})\pi a^2}{2}$.

Câu 8. Cắt hình trụ (T) bằng một mặt phẳng đi qua trục được thiết diện là một hình chữ nhật có diện tích bằng $30cm^2$ và chu vi bằng $26\ cm$. Biết chiều dài của hình chữ nhật lớn hơn đường kính mặt đáy của hình trụ (T). Diện tích toàn phần của (T) là:

A. $23\pi(cm^2)$. **B.** $\frac{23\pi}{2}(cm^2)$. **C.** $\frac{69\pi}{2}(cm^2)$. **D.** $69\pi(cm^2)$.

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{2}{2x-1}, f(0)=1, f(1)=2$. Giá trị của biểu thức $f(-1)+f(3)$ bằng

A. $2+\ln 15$ **B.** $3+\ln 15$ **C.** $\ln 15$ **D.** $4+\ln 15$

Câu 10. Cho $\int_{0}^{m}\left(3x^2-2x+1\right)\mathrm{d}x=6$. Giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-1;2)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(0;4)$. **D.** $(-3;1)$.

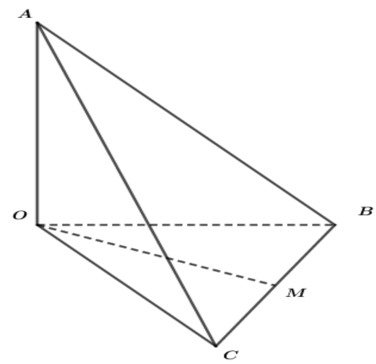
Câu 11. Có bao nhiêu cách phân công 4 thầy giáo dạy toán vào dạy 12 lớp 12, mà mỗi thầy dạy đúng 3 lớp ?

A. 369600 **B.** 396900 **C.** 220 **D.** 369000

Câu 12. Giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^4+x^2+2}{\left(x^3+1\right)\left(3x-1\right)}}$ có kết quả là :

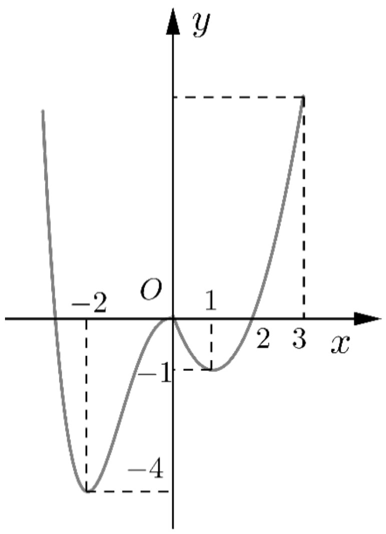
A. $-\sqrt{3}$ **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\sqrt{3}$ **D.** $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Câu 13. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA=OB=OC$. Gọi M là trung điểm của BC (tham khảo hình vẽ bên dưới). Góc giữa hai đường thẳng OM và AB bằng



A. 45^0 **B.** 90^0 **C.** 30^0 **D.** 60^0

Câu 14. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị hàm $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ bên dưới.



Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(-2;1)$. **C.** $(-\infty;-4)$. **D.** $(-2;3)$.

Câu 15. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x+m$ nhỏ hơn hoặc bằng $\sqrt{5}$.

A. 5. **B.** 2. **C.** 11. **D.** 4.

Câu 16. Giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $y = x - 2\sqrt{x}$ trên đoạn $[0;9]$ lần lượt là m và M . Giá trị của tổng $m + M$ bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 17. Cho hàm số $y = \dfrac{ax+1}{bx+c}$ (a, b, c là các tham số) có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$+$	$\Vert$	$+$	
y	1	$\nearrow$	$+\infty \ \Vert \ -\infty$	$\nearrow$	1

Xét các phát biểu sau:

(1): $c > 1$.

(2): $a + b < 0$.

(3): $a + b + c = 0$.

(4): $a > 0$.

Số phát biểu đúng là

A. 1. **B.** 2 . **C.** 3 . **D.** 4 .

Câu 18. Đặt $\log_3 2 = a$ khi đó $\log_{16} 27$ bằng

A. $\dfrac{3a}{4}$ **B.** $\dfrac{3}{4a}$ **C.** $\dfrac{4}{3a}$ **D.** $\dfrac{4a}{3}$

Câu 19. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\log_2\left(x^2 + y^2\right) = 1 + \log_2 xy$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $x = y$. **B.** $x > y$. **C.** $x < y$. **D.** $x = y^2$.

Câu 20. Đặt $a = \log_2 3$; $b = \log_5 3$. Nếu biểu diễn $\log_6 45 = \dfrac{a(m+nb)}{b(a+p)}$ thì $m + n + p$ bằng

A. 3 **B.** 4 **C.** 6 **D.** -3

Câu 21. Một hình đa diện lồi có số mặt M , số đỉnh D và số cạnh C . Khi đó, hệ thức nào dưới đây là đúng ?

A. $D + M - C = 2$ **B.** $D + C - M = 2$ **C.** $M + C - D = 2$ **D.** $M + D = C$

Câu 22. Tính thể tích V của khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AC' = 5a$, cạnh đáy là $4a$.

A. $V = 12a^3$. **B.** $V = 20a^3\sqrt{3}$. **C.** $V = 20a^3$. **D.** $V = 12a^3\sqrt{3}$.

.**Câu 23.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A, $AB = AC = 4a; BC = 6a$ .Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) nằm trong tam giác ABC. Các mặt bên của hình chóp cùng tạo với đáy góc 60^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $6a^3\sqrt{3}$. **B.** $a^3\sqrt{3}$. **C.** $8a^3\sqrt{3}$. **D.** $3a^3\sqrt{3}$.

Câu 24. Cho hình nón đỉnh I, đường cao IO (O là tâm của đáy) và có độ dài đường sinh bằng $3cm$, góc ở đỉnh bằng $60°$. Gọi K là điểm thuộc đoạn IO thỏa mãn $IO = \dfrac{3}{2}IK$, cắt hình nón bằng mặt phẳng (P) qua K và vuông góc với IO, khi đó thiết diện tạo thành có diện tích là S. Tính S.

A. $S=\frac{\pi}{3}\left(cm^2\right)$. **B.** $S=\pi\left(cm^2\right)$. **C.** $S=3\pi\left(cm^2\right)$. **D.** $S=\frac{2\pi}{3}\left(cm^2\right)$.

Câu 25. Cho $F(x)=x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^{2x}$.

A. $\int f'(x)e^{2x}dx=-2x^2+2x+C$. **B.** $\int f'(x)e^{2x}dx=-x^2+2x+C$.

C. $\int f'(x)e^{2x}dx=-x^2+x+C$. **D.** $\int f'(x)e^{2x}dx=2x^2-2x+C$.

Câu 26. Có bao nhiêu số thực a để $\int_0^1 \frac{x}{a+x^2}dx=1$.

A. 2 **B.** 1 **C.** 0 **D.** 3

Câu 27. Số giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2022;2022]$ để phương trình $(m+1)\sin^2 x-\sin 2x+\cos 2x=0$ có nghiệm là:

A. 4045. **B.** 4044. **C.** 2023. **D.** 2024.

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và $SA=a\sqrt{3}$. Gọi α là góc giữa SD và (SAC). Giá trị $\sin\alpha$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Câu 29. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y=\frac{3}{4}x^4-\frac{9}{2}x^2+(2m+15)x-3m+1$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 30. Cho hàm số $y=\left|x^3-3x^2+m\right|$, với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số có 5 điểm cực trị. Tổng tất cả các phần tử của tập S là

A. 3 **B.** 10 **C.** 6 **D.** 5

Câu 31. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	||	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1 || $-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $|f(x)|+m=0$ có 5 nghiệm phân biệt là

A. $(-2;-1]$. **B.** $[-1;2)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(-2;1)$.

Câu 32. Cho hình chóp đều đỉnh S có đáy là đa giác đều 8 cạnh. Một hình nón đỉnh S có đáy là đường tròn ngoại tiếp đáy hình chóp. Tính tỉ số thể tích của khối nón và khối chóp tương ứng.

A. $\frac{\pi}{3}$. **B.** $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. **C.** $\frac{\pi}{2}$. **D.** $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

Câu 33. Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\frac{4x-1-\sqrt{x^2+2x+6}}{x^2+x-2}$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 34. Gọi $x_0=\frac{a+b\sqrt{3}}{c}$ với $(a,b,c\in N,\frac{a}{c}$ tối giản) là một nghiệm lớn hơn 1 của phương trình $2x\left[\left(\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{x}}-\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x}+1\right]=2x^2-1$. Giá trị của $P=a+b+c$ là

A. $P=6$. **B.** $P=0$. **C.** $P=2$. **D.** $P=4$.

Câu 35. Cho các hàm số $f(x),f_1(x),f_2(x),\ldots$ thỏa mãn:

$$f_1(x)=f(x)=\ln\frac{e^x+1}{e^x-1};\ f_{n+1}(x)=f\left(f_n(x)\right),\forall n=1;2;3;\ldots$$

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $f_{2023}(\ln 2)=\ln 2$. **B.** $f_{2023}(\ln 3)=\ln 4$. **C.** $f_{2023}(\ln 2)=\ln 3$. **D.** $f_{2023}(\ln 3)=\ln 3$.

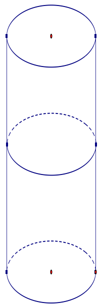
Câu 36. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $(x-1).\log\left(e^{-x}+m\right)=x-2$ có 2 nghiệm thực phân biệt

A. Vô số. **B.** 11. **C.** 9. **D.** 10.

Câu 37. Cho hình hộp đứng $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh $AB=AD=2$, $AA_1=\sqrt{3}$ và góc $\widehat{BAD}=60^\circ$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh A_1D_1 và A_1B_1. Tính thể tích V của khối chóp $A.BDMN$.

A. $V=\frac{5}{2}$. **B.** $V=\frac{3}{2}$. **C.** $V=4$. **D.** $V=2$.

Câu 38. Một con quạ đang khát nước. Nó bay rất lâu để tìm nước nhưng chẳng thấy một giọt nước nào. Mệt quá, nó đậu xuống cành cây nghỉ. Nó nhìn quanh và bỗng thấy một cái bình hình trụ có bán kính đáy là $2cm$, chiều cao $21cm$ ở dưới một gốc cây. Trong bình đang có một ít nước, khoảng cách giữa đáy cốc và mặt nước là $12cm$ (Hình vẽ). Nhìn chung quanh, quạ thấy những viên đá nhỏ nằm lay lắt ở gần đấy. Lập tức, nó dùng mỏ gắp một viên đá hình cầu có bán kính $0,6cm$ thả vào bình. Cứ như vậy, nó gắp những viên đá khác và tiếp tục thả vào bình. Giả sử các viên đá đều là hình cầu có bán kính $0,6cm$ Chẳng bao lâu, nước đã dâng lên. Để uống được nước thì con quạ cần thả vào bình ít nhất bao nhiêu viên đá biết rằng quạ muốn uống được nước trong cốc thì mặt nước phải cách miệng cốc không quá $6cm$?

A. 42. **B.** 41. **C.** 30. **D.** 27.

Câu 39. Trong tất cả các hình chóp tứ giác đều nội tiếp mặt cầu có bán kính bằng 9, khối chóp có thể tích lớn nhất bằng bao nhiêu ?

A. $576\sqrt{2}$. **B.** 144. **C.** 576. **D.** $144\sqrt{6}$.

Câu 40. Xét hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[0;1\right]$ và thỏa mãn điều kiện $4x.f\left(x^2\right)+3f\left(1-x\right)=\sqrt{1-x^2}$.

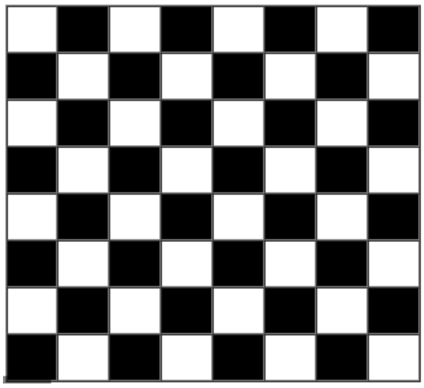
Tích phân $I=\int\limits_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng:

A. $I=\dfrac{\pi}{20}$. **B.** $I=\dfrac{\pi}{16}$. **C.** $I=\dfrac{\pi}{6}$. **D.** $I=\dfrac{\pi}{4}$.

Câu 41. Cho $f\left(x\right)\neq 0$, $f'\left(x\right)=\dfrac{3x^4+x^2-1}{x^2}.f^2\left(x\right)$, $f\left(1\right)=-\dfrac{1}{3}$. Xét $S=\sum\limits_{k=1}^{2022} f\left(k\right)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{b}{a}-1\right)$ với $\dfrac{b}{a}$ tối giản. Tính $a+b$.

A. 4092530. **B.** 4090507. **C.** 4088485. **D.** 4086463.

Câu 42. Một bàn cờ vua gồm 8×8 ô vuông, mỗi ô có cạnh bằng 1 đơn vị. Một ô vừa là hình vuông hay hình chữ nhật, hai ô là hình chữ nhật,… Chọn ngẫu nhiên một hình chữ nhật trên bàn cờ. Xác suất để hình được chọn là một hình vuông có cạnh lớn hơn 4 đơn vị bằng



A. $\dfrac{5}{216}$. **B.** $\dfrac{17}{108}$. **C.** $\dfrac{51}{196}$. **D.** $\dfrac{29}{216}$.

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O, $AB=a$, $BC=a\sqrt{3}$. Tam giác ASO cân tại S, mặt phẳng $\left(SAD\right)$ vuông góc với mặt phẳng $\left(ABCD\right)$, góc giữa SD và $\left(ABCD\right)$ bằng $60°$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{3a}{2}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{3a}{4}$.

Câu 44. Cho hàm số $y=ax^3-x^2+bx-1$ với a,b là các số thực, $a\neq 0$, $a\neq b$ sao cho đồ thị hàm số cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{5a^2-3ab+2}{a^2\left(b-a\right)}$.

A. $15\sqrt{3}$. **B.** $8\sqrt{2}$. **C.** $11\sqrt{6}$. **D.** $12\sqrt{3}$.

Câu 45. Cho hàm số $f\left(x\right)=x^3-6x^2+9x$. Đặt $f^k\left(x\right)=f\left(f^{k-1}\left(x\right)\right)$ với k là số tự nhiên lớn hơn 1. Hỏi phương trình $f^9\left(x\right)=0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 19684. **B.** 9841. **C.** 19683. **D.** 9842.

Câu 46. Cho $x;y\in\mathbb{R}$, $\left(x\geq 0\right)$ thỏa mãn: $2021^{x+3y}+2021^{xy+1}+x+1=2021^{-xy-1}+\dfrac{1}{2021^{x+3y}}-y\left(x+3\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $T=x+2y$.

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** -1. **C.** $-\dfrac{2}{3}$. **D.** 1.

Câu 47. Số nghiệm của phương trình $\dfrac{x^2}{2}+x-\ln\left(x^2-2\right)=2022$ là

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 48. Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_{\sqrt{3}}\dfrac{x+y}{x^2+y^2+xy+2}=x\left(x-3\right)+y\left(y-3\right)+xy$. Tìm giá trị lớn nhất của $P=\dfrac{3x+2y+1}{x+y+6}$.

A. 2 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 4

Câu 49. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Góc tạo bởi mặt bên $\left(SAB\right)$ với đáy bằng α. Tỉ số diện tích của tam giác SAB và hình bình hành $ABCD$ bằng k. Mặt phẳng $\left(P\right)$ đi qua AB và chia hình chóp $S.ABCD$ thành hai phần có thể tích bằng nhau. Gọi $\left(\beta\right)$ là góc tạo bởi mặt phẳng $\left(P\right)$ và mặt đáy. Tính $\cot\beta$ theo k và α.

A. $\cot\beta=\cot\alpha+\dfrac{\sqrt{5}+1}{k\sin\alpha}$ **B.** $\cot\beta=\tan\alpha+\dfrac{\sqrt{5}+1}{k\sin\alpha}$

C. $\cot\beta=\cot\alpha+\dfrac{\sqrt{5}-1}{k\sin\alpha}$ **D.** $\cot\beta=\tan\alpha+\dfrac{\sqrt{5}-1}{k\sin\alpha}$

Câu 50. Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích là V. Điểm M thay đổi trong tam giác BCD. Các đường thẳng qua M và song song với AB, AC, AD lần lượt cắt các mặt phẳng $\left(ACD\right)$, $\left(ABD\right)$, $\left(ABC\right)$ tại N, P, Q. Giá trị lớn nhất của thể tích khối tứ diện $MNPQ$ là

A. $\dfrac{V}{27}$. **B.** $\dfrac{V}{16}$. **C.** $\dfrac{V}{8}$. **D.** $\dfrac{V}{54}$.

……………………….HẾT…………………….

BẢNG ĐÁP ÁN

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
ĐA	**A**	**B**	**B**	**A**	**A**	**C**	**B**	**C**	**B**	**C**	**A**	**B**	**D**
Câu	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
ĐA	**B**	**A**	**A**	**B**	**B**	**A**	**B**	**A**	**D**	**D**	**B**	**A**	**B**
Câu	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
ĐA	**D**	**A**	**D**	**C**	**A**	**B**	**C**	**D**	**C**	**D**	**B**	**A**	**C**
Câu	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50		
ĐA	**A**	**B**	**A**	**D**	**D**	**D**	**C**	**C**	**B**	**A**	**A**		

Câu 1. Trong các hàm số sau đây, hàm số nào là hàm số chẵn?

A. $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$. **B.** $y=\sin x$. **C.** $y=\sin x+\tan x$. **D.** $y=\sin x.\cos x$

Lời giải

Chọn A

Ta có $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$ nên $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ là hàm số chẵn.

Câu 2. Một học sinh có 4 quyển sách Toán khác nhau và 5 quyển sách Ngữ văn khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách xếp 9 quyển sách trên giá sao cho hai quyển sách kề nhau phải khác loại ?

A. 20. **B.** 2880. **C.** 362880. **D.** 5760.

Lời giải

Chọn B

Để xếp 9 quyển sách trên giá sao cho hai quyển sách kề nhau phải khác loại, ta làm như sau:

Xếp 5 quyển sách Ngữ văn cạnh nhau có $5!=120$ cách.

Giữa 5 quyển sách Ngữ văn trên có 4 chỗ trống, xếp 4 quyển sách Toán vào 4 chỗ trống đó có $4!=24$ cách.

Theo quy tắc nhân có $120.24=2880$ cách sắp xếp thỏa điều kiện đề bài.

Câu 3. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1=6$; $d=9$. Khi đó số 2022 là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số?

A. 226. **B.** 225. **C.** 223. **D.** 224.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $u_n=u_1+(n-1)d \Leftrightarrow 2022=6+(n-1).9 \Leftrightarrow n=225$.

Câu 4. Tìm m để hàm số $y=(m-1)x^4+(2m-1)x^2+1$ có đúng 3 điểm cực trị.

A. $\frac{1}{2}<m<1$. **B.** $\frac{1}{2}\le m<1$. **C.** $\frac{1}{2}<m\le 1$. **D.** $\frac{1}{2}\le m\le 1$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: $Ycbt \Leftrightarrow (m-1)(2m-1)<0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}<m<1$.

Cách 2: $y'=4(m-1)x^3+2(2m-1)x=2x\left[2(m-1)x^2+2m-1\right]$

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 2(m-1)x^2+2m-1=0 \ (1) \end{array}\right.$$

Hàm số có đúng 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow y'$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow (m-1)(2m-1)<0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}<m<1$.

Câu 5. Đặt $a=\ln 2, b=\ln 5$, hãy biểu diễn $I=\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{2}{3}+\ln\frac{3}{4}+...+\ln\frac{98}{99}+\ln\frac{99}{100}$ theo a và b.

A. $I=-2(a+b)$ **B.** $I=-2(a-b)$ **C.** $I=2(a+b)$ **D.** $I=2(a-b)$

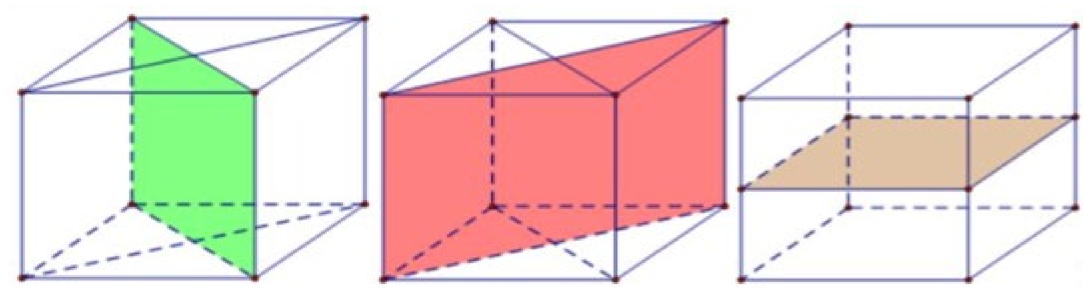
Lời giải

$$I=\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{2}{3}+\ln\frac{3}{4}+...+\ln\frac{98}{99}+\ln\frac{99}{100}$$
$$=\ln\left(\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{3}{4}...\frac{98}{99}.\frac{99}{100}\right)=\ln\frac{1}{100}=\ln 10^{-2}$$
$$=-2\ln 10=-2(\ln 2+\ln 5)=-2(a+b).$$

Câu 6. Lăng trụ đứng có đáy là hình thoi có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 2. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

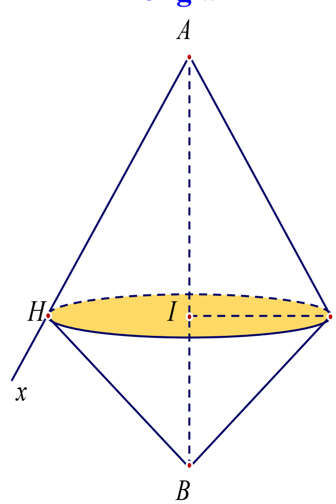


Lăng trụ đứng có đáy là hình thoi có tất cả 3 mặt phẳng đối xứng (Hình vẽ).

Câu 7. Cho đoạn thẳng AB có độ dài bằng $2a$, vẽ tia Ax về phía điểm B sao cho điểm B luôn cách tia Ax một đoạn bằng a. Gọi H là hình chiếu của B lên tia Ax, khi tam giác AHB quay quanh trục AB thì đường gấp khúc AHB vẽ thành mặt tròn xoay có diện tích xung quanh bằng:

A. $\frac{3\sqrt{2}\pi a^2}{2}$. **B.** $\frac{(3+\sqrt{3})\pi a^2}{2}$. **C.** $\frac{(1+\sqrt{3})\pi a^2}{2}$. **D.** $\frac{(2+\sqrt{2})\pi a^2}{2}$.

Lời giải



Xét tam giác AHB vuông tại H. Ta có $AH=\sqrt{AB^2-HB^2}=a\sqrt{3}$

Xét tam giác AHB vuông tại H, $HI\perp AB$ tại I ta có $HI=\frac{AH.HB}{AB}=\frac{a\sqrt{3}.a}{2a}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Khi tam giác AHB quay quanh trục AB thì đường gấp khúc AHB vẽ thành mặt tròn xoay (có diện tích xung quanh là S) là hợp của hai mặt xung quanh của hình nón (N_1) và (N_2).

Trong đó:

(N_1) là hình nón có được do quay tam giác AHI quanh trục AI có diện tích xung quanh là

$$S_1 = \pi.HI.AH = \pi.\frac{a\sqrt{3}}{2}.a\sqrt{3} = \frac{3\pi a^2}{2}$$

(N_2) là hình nón có được do quay tam giác BHI quanh trục BI có diện tích xung quanh là

$$S_2 = \pi.HI.BH = \pi.\frac{a\sqrt{3}}{2}.a = \frac{\sqrt{3}\pi a^2}{2}$$

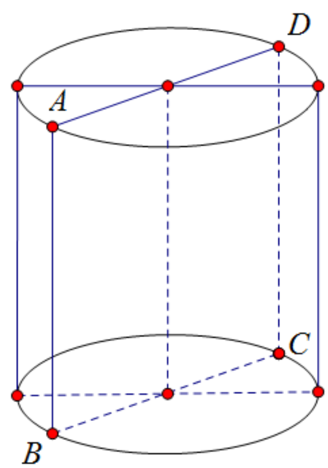
$$\Rightarrow S = S_1 + S_2 = \frac{3\pi a^2}{2} + \frac{\sqrt{3}\pi a^2}{2} = \frac{\left(3+\sqrt{3}\right)\pi a^2}{2}.$$

Câu 8. Cắt hình trụ (T) bằng một mặt phẳng đi qua trục được thiết diện là một hình chữ nhật có diện tích bằng $30cm^2$ và chu vi bằng $26\ cm$. Biết chiều dài của hình chữ nhật lớn hơn đường kính mặt đáy của hình trụ (T). Diện tích toàn phần của (T) là:

A. $23\pi\left(cm^2\right)$. **B.** $\frac{23\pi}{2}\left(cm^2\right)$. **C.** $\frac{69\pi}{2}\left(cm^2\right)$. **D.** $69\pi\left(cm^2\right)$.

Lời giải

Chọn C



Gọi h, r lần lượt là đường cao và bán kính đáy của hình trụ (T). Thiết diện của mặt phẳng và hình trụ (T) là hình chữ nhật $ABCD$. Khi đó theo giả thiết ta có

$$\begin{cases} h > 2r \\ S_{ABCD} = h.2r = 30 \\ C_{ABCD} = 2(h+2r) = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h > 2r \\ hr = 15 \\ h + 2r = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h > 2r \\ h = 13 - 2r \\ -2r^2 + 15r - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h > 2r \\ h = 13 - 2r \\ \left[\begin{array}{l} r = 5 \Rightarrow h = 3(l) \\ r = \frac{3}{2} \Rightarrow h = 10(TM) \end{array}\right. \end{cases}$$

Vậy $S_{TP} = S_{XQ} + 2S_{đ} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi.\frac{3}{2}.10 + 2\pi\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{69\pi}{2}\left(cm^2\right)$.

Câu 9. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{2}{2x-1}, f(0) = 1, f(1) = 2$. Giá trị của biểu thức $f(-1) + f(3)$ bằng

A. $2+\ln 15$ **B.** $3+\ln 15$ **C.** $\ln 15$ **D.** $4+\ln 15$

Lời giải

Chọn C

$\int \frac{2}{2x-1}dx = \ln|2x-1| + C = f(x)$

Với $x < \frac{1}{2}, f(0) = 1 \Rightarrow C = 1$ nên $f(-1) = 1 + \ln 3$

Với $x > \frac{1}{2}, f(1) = 2 \Rightarrow C = 2$ nên $f(3) = 2 + \ln 5$

Nên $f(-1) + f(3) = 3 + \ln 15$

Câu 10. Cho $\int_0^m (3x^2 - 2x + 1)\mathrm{d}x = 6$. Giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-1;2)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(0;4)$. **D.** $(-3;1)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int_0^m (3x^2 - 2x + 1)\mathrm{d}x = \left(x^3 - x^2 + x\right)\Big|_0^m = m^3 - m^2 + m$.

$\int_0^m (3x^2 - 2x + 1)\mathrm{d}x = 6 \Leftrightarrow m^3 - m^2 + m - 6 = 0 \Leftrightarrow m = 2 \in (0;4)$.

Vậy $m = 2 \in (0;4)$.

Câu 11. Có bao nhiêu cách phân công 4 thầy giáo dạy toán vào dạy 12 lớp 12, mỗi thầy dạy đúng 3 lớp ?

A. 369600 **B.** 396900 **C.** 220 **D.** 369000

Lời giải

Chọn A

Giáo viên thứ nhất có C_{12}^3 cách chọn.

Giáo viên thứ hai có C_9^3 cách chọn.

Giáo viên thứ ba có C_6^3 cách chọn.

Giáo viên thứ tư có C_3^3 cách chọn.

Vậy số cách phân công 4 thầy giáo vào dạy 12 lớp 12 là: $C_{12}^3.C_9^3.C_6^3.C_3^3 = 369600$ cách

Câu 12. Giới hạn $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^4+x^2+2}{(x^3+1)(3x-1)}}$ có kết quả là :

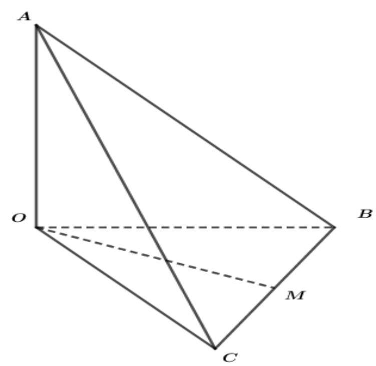
A. $-\sqrt{3}$ **B.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\sqrt{3}$ **D.** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^4+x^2+2}{(x^3+1)(3x-1)}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^4\left(1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x^4}\right)}{x^4\left(1+\dfrac{1}{x^3}\right)\left(3-\dfrac{1}{x}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x^4}\right)}{\left(1+\dfrac{1}{x^3}\right)\left(3-\dfrac{1}{x}\right)}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

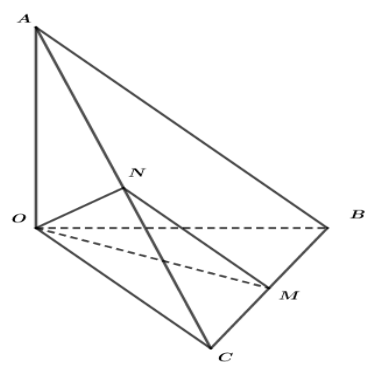
Câu 13. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA=OB=OC$. Gọi M là trung điểm của BC (tham khảo hình vẽ bên dưới). Góc giữa hai đường thẳng OM và AB bằng



A. 45^0 **B.** 90^0 **C.** 30^0 **D.** 60^0

Lời giải

Chọn D



Đặt $OA=a$ suy ra $OB=OC=a$ và $AB=BC=AC=a\sqrt{2}$

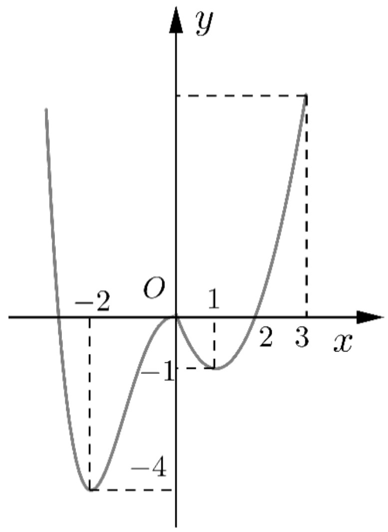
Gọi N là trung điểm AC ta có $MN//AB$ và $MN=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Suy ra góc $\widehat{(OM,AB)}=\widehat{(OM,MN)}$. Xét $\widehat{OMN}$

Trong tam giác OMN có $ON=OM=MN=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ nên OMN là tam giác đều

Suy ra $\widehat{OMN}=60^0$. Vậy $\widehat{(OM,AB)}=\widehat{(OM,MN)}=60^0$

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm $y=f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(-2;1)$. **C.** $(-\infty;-4)$. **D.** $(-2;3)$.

Lời giải

Chọn B

Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta thấy ngay hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-2;1)$.

Câu 15. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x+m$ nhỏ hơn hoặc bằng $\sqrt{5}$.

A. 5. **B.** 2. **C.** 11. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

$y=x^3-3x+m$; $y'=3x^2-3$; $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

$\Rightarrow$ Với mọi m phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt và y' đổi dấu khi qua hai nghiệm.

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị với mọi m.

Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho là: $y=-2x+m$ (Δ).

Khoảng cách từ O tới đường thẳng Δ là $d(O;\Delta)=\dfrac{|m|}{\sqrt{5}}$.

Theo bài ra ta có: $d(O,\Delta)\le\sqrt{5} \Leftrightarrow \dfrac{|m|}{\sqrt{5}}\le\sqrt{5} \Leftrightarrow |m|\le 5 \Leftrightarrow -5\le m\le 5$.

Vì m nguyên dương nên $m\in\{1;2;3;4;5\}$.

Câu 16. Giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $y=x-2\sqrt{x}$ trên đoạn $[0;9]$ lần lượt là m và M. Giá trị của tổng $m+M$ bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Đạo hàm $y'=1-\dfrac{1}{\sqrt{x}};\forall x\in(0;9]\longrightarrow y'=0\Leftrightarrow x=1\in[0;9]$.

Ta có $\begin{cases} f(0)=0 \\ f(1)=-1 \\ f(9)=3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} m=\min\limits_{[0;9]} f(x)=-1 \\ M=\max\limits_{[0;9]} f(x)=3 \end{cases} \longrightarrow m+M=2.$

Câu 17. Cho hàm số $y=\dfrac{ax+1}{bx+c}$ (a,b,c là các tham số) có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	1	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	1

Xét các phát biểu sau:

(1): $c>1$.

(2): $a+b<0$.

(3): $a+b+c=0$.

(4): $a>0$.

Số phát biểu đúng là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số luôn đồng biến trên từng khoảng xác định, đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=2$ và tiệm cận ngang là đường thẳng $y=1$ nên ta có hệ

$$\begin{cases} -\dfrac{c}{b}=2 \\ \dfrac{a}{b}=1 \\ ac-b>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-2b \\ a=b \\ ac-b>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-2b \\ a=b \\ -2b^2-b>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<c<1 \\ -\dfrac{1}{2}<a<0 \\ -\dfrac{1}{2}<b<0 \\ a+b+c=0 \end{cases}$$

Dựa vào hệ trên ta có các phát biểu $(1),(4)$ là sai, $(2),(3)$ đúng.

Câu 18. Đặt $\log_3 2=a$ khi đó $\log_{16}27$ bằng

A. $\dfrac{3a}{4}$ **B.** $\dfrac{3}{4a}$ **C.** $\dfrac{4}{3a}$ **D.** $\dfrac{4a}{3}$

Lời giải

Chọn B

Ta có $\log_{16}27=\dfrac{3}{4}\log_2 3=\dfrac{3}{4.\log_3 2}=\dfrac{3}{4a}$

Câu 19. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\log_2\left(x^2+y^2\right)=1+\log_2 xy$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $x=y$. **B.** $x>y$. **C.** $x<y$. **D.** $x=y^2$.

Lời giải

Chọn A

Với x, $y > 0$ ta có:

$\log_2\left(x^2+y^2\right)=1+\log_2 xy \Leftrightarrow \log_2\left(x^2+y^2\right)=\log_2 2xy$.

$\Leftrightarrow x^2+y^2=2xy$.

$\Leftrightarrow x=y$.

Câu 20. Đặt $a=\log_2 3$; $b=\log_5 3$. Nếu biểu diễn $\log_6 45=\dfrac{a(m+nb)}{b(a+p)}$ thì $m+n+p$ bằng

A. 3 **B.** 4 **C.** 6 **D.** -3

Lời giải

Chọn B

Ta có $\log_6 45=\dfrac{\log_3 45}{\log_3 6}=\dfrac{\log_3 9+\log_3 5}{\log_3 2+\log_3 3}=\dfrac{2+\dfrac{1}{b}}{\dfrac{1}{a}+1}=\dfrac{a(2b+1)}{b(1+a)}$

Suy ra $m=1, n=2, p=1 \Rightarrow m+n+p=4$

Câu 21. Một hình đa diện lồi có số mặt M, số đỉnh D và số cạnh C. Khi đó, hệ thức nào dưới đây là đúng ?

A. $D+M-C=2$ **B.** $D+C-M=2$ **C.** $M+C-D=2$ **D.** $M+D=C$

Lời giải

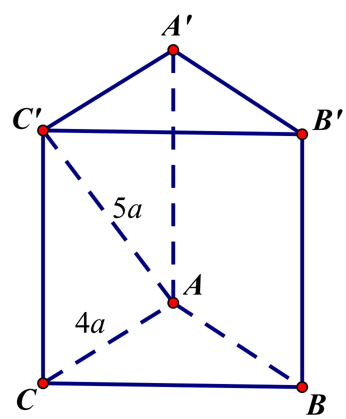
Chọn A

Câu 22. Tính thể tích V của khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AC'=5a$, cạnh đáy là $4a$.

A. $V=12a^3$. **B.** $V=20a^3\sqrt{3}$. **C.** $V=20a^3$. **D.** $V=12a^3\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D



Vì $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ tam giác đều nên ta có $CC'\perp(ABC)$ và ΔABC đều cạnh là $4a$.

Do đó: $CC'=\sqrt{25a^2-16a^2}=3a$; $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}(4a)^2\dfrac{\sqrt{3}}{2}=4a^2\sqrt{3}$

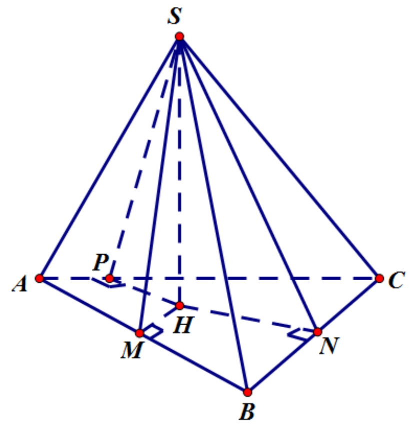
$V_{ABC.A'B'C'}=CC'.S_{\Delta ABC}=3a.4a^2\sqrt{3}=12a^3\sqrt{3}$.

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A, $AB=AC=4a; BC=6a$ .Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) nằm trong tam giác ABC. Các mặt bên của hình chóp cùng tạo với đáy góc 60^0. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

A. $6a^3\sqrt{3}$. **B.** $a^3\sqrt{3}$. **C.** $8a^3\sqrt{3}$. **D.** $3a^3\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm S lên mặt phẳng (ABC), M, N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm H lên AB, BC, CA.

Khi đó ta có $\Delta SHM = \Delta SHN = \Delta SHP$

Suy ra $HM = HN = HP$

Suy ra H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC

$S_{\Delta ABC} = \sqrt{63}a^2$

$HN = \dfrac{S_{\Delta ABC}}{p} = \dfrac{\sqrt{63}}{7}a$

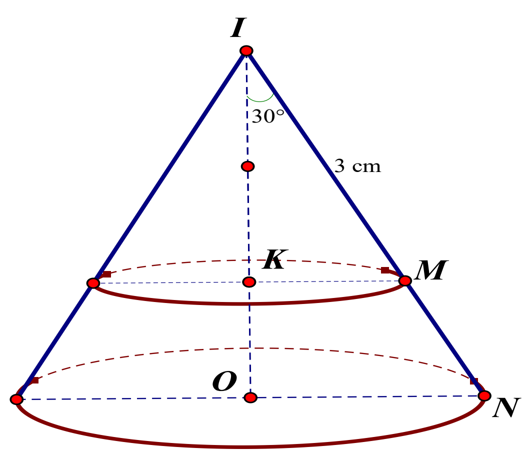
$SH = \dfrac{3\sqrt{21}}{7}a$

Câu 24. Cho hình nón đỉnh I, đường cao IO (O là tâm của đáy) và có độ dài đường sinh bằng $3cm$, góc ở đỉnh bằng $60°$. Gọi K là điểm thuộc đoạn IO thỏa mãn $IO = \dfrac{3}{2}IK$, cắt hình nón bằng mặt phẳng (P) qua K và vuông góc với IO, khi đó thiết diện tạo thành có diện tích là S. Tính S.

A. $S = \dfrac{\pi}{3}(cm^2)$. **B.** $S = \pi(cm^2)$. **C.** $S = 3\pi(cm^2)$. **D.** $S = \dfrac{2\pi}{3}(cm^2)$.

Lời giải

Chọn B



Thiết diện tạo thành là đường tròn tâm K, bán kính KM.

Ta có: $KM = \dfrac{2}{3}.ON = \dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{2}.IN = 1$. Diện tích thiết diện là: $S = \pi.KM^2 = \pi\ (cm^2)$

$V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}\sqrt{63}a^2.\dfrac{3\sqrt{21}}{7}a = 3\sqrt{3}a^3$.

Câu 25. Cho $F(x)=x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^{2x}$. Tìm nguyên hàm của hàm số $f'(x)e^{2x}$.

A. $\int f'(x)e^{2x}dx=-2x^2+2x+C$. **B.** $\int f'(x)e^{2x}dx=-x^2+2x+C$.

C. $\int f'(x)e^{2x}dx=-x^2+x+C$. **D.** $\int f'(x)e^{2x}dx=2x^2-2x+C$.

Lời giải

Chọn A

$F(x)=x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)e^{2x}$

$\Rightarrow F'(x)=f(x).e^{2x}\Rightarrow 2x=f(x).e^{2x}\Rightarrow \int f(x).e^{2x}dx=x^2+C_1$

Đặt

$$\begin{cases} u=e^{2x} \\ dv=f'(x)dx \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} du=2e^{2x}dx \\ v=f(x) \end{cases}$$

$\Rightarrow \int f'(x).e^{2x}dx=f(x).e^{2x}-2.\int f(x).e^{2x}dx+C_2=-2x^2+2x+C$

Câu 26. Có bao nhiêu số thực a để $\int_0^1 \frac{x}{a+x^2}dx=1$.

A. 2 **B.** 1 **C.** 0 **D.** 3

Lời giải

Chọn B

Điều kiện tích phân tồn tại là $a+x^2\neq 0,\forall x\in[0;1]\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a<-1 \\ a>0 \end{array}\right.$

Đặt $t=a+x^2\Rightarrow dt=2x\mathrm{d}x$. Khi đó

$$\int_0^1 \frac{x}{a+x^2}dx=\frac{1}{2}\int_a^{1+a}\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+a}{a}\right|=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1+a=e^2a \\ 1+a=-e^2a \end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\frac{1}{e^2-1} \\ a=\frac{-1}{e^2+1} \end{array}\right.$$

So sánh điều kiện ta được $a=\frac{1}{e^2-1}$.

Câu 27. Số giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2022;2022]$ để phương trình $(m+1)\sin^2 x-\sin 2x+\cos 2x=0$ có nghiệm là:

A. 4045. **B.** 4044. **C.** 2023. **D.** 2024.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$(m+1)\sin^2 x-\sin 2x+\cos 2x=0\Leftrightarrow (m+1)\frac{1-\cos 2x}{2}-\sin 2x+\cos 2x=0$

$\Leftrightarrow -\sin 2x+\frac{1-m}{2}\cos 2x=\frac{-m-1}{2}$.

Điều kiện để phương trình $a\sin x+b\cos x=c$ có nghiệm là $a^2+b^2\geq c^2$ ứng với phương trình trên ta được

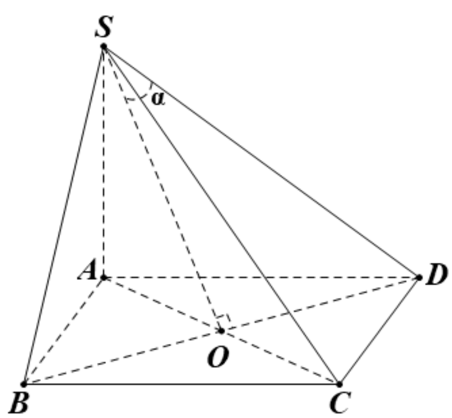
$$1+\left(\frac{1-m}{2}\right)^2\geq\left(\frac{-m-1}{2}\right)^2\Leftrightarrow 1+\frac{1-2m+m^2}{4}\geq\frac{m^2+2m+1}{4}\Leftrightarrow 4m\leq 4\Leftrightarrow m\leq 1.$$

Vậy các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2022;2022]$ thỏa mãn là $\{-2022;...;-1;0;1\}$ vậy có 2024 số.

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi α là góc giữa SD và (SAC). Giá trị $\sin\alpha$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải



Gọi $O = AC \cap BD$. Ta có: $\begin{cases} DO \perp AC \\ DO \perp SA\left(SA \perp (ABCD)\right) \end{cases} \Rightarrow DO \perp (ABCD)$.

$\Rightarrow SO$ là hình chiếu của SD lên mặt phẳng $(SAC) \Rightarrow \widehat{(SD;(SAC))} = \widehat{(SD;SO)} = \widehat{DSO} = \alpha$.

Xét ΔSAD vuông tại A: $SD = \sqrt{3a^2 + a^2} = 2a$.

Xét ΔSOD vuông tại O: có $SD = 2a$, $OD = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin\alpha = \sin\widehat{DSO} = \frac{DO}{SD} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Câu 29. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = \frac{3}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2 + (2m+15)x - 3m + 1$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y' = 3x^3 - 9x + 2m + 15 \ge 0\ \forall x \in (0;+\infty)$ và dấu bằng xảy ra tại hữu hạn điểm thuộc $(0;+\infty) \Leftrightarrow 3x^3 - 9x + 15 \ge -2m\ \forall x \in (0;+\infty)$.

Xét hàm số: $g(x) = 3x^3 - 9x + 15$ trên $(0;+\infty)$.

Ta có: $g'(x) = 9x^2 - 9$

$g'(x) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1\ (l) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	15	$\searrow$	9	$\nearrow$	$+\infty$

Từ BBT ta có: $-2m \le 9 \Leftrightarrow m \ge -\dfrac{9}{2}$

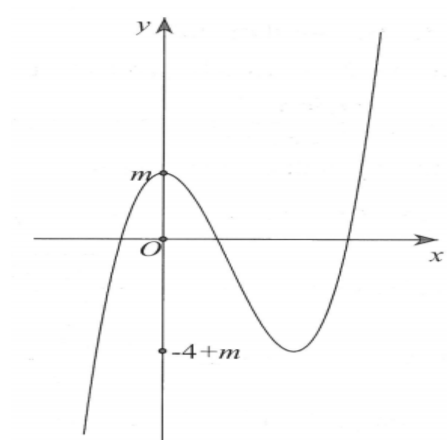
Vậy $m \in \{-4;-3;-2;-1\}$.

Câu 30. Cho hàm số $y = \left|x^3 - 3x^2 + m\right|$, với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số có 5 điểm cực trị. Tổng tất cả các phần tử của tập S là

A. 3 **B.** 10 **C.** 6 **D.** 5

Lời giải:

Xét hàm số $g(x) = x^3 - 3x^2 + m$ có đồ thị như hình vẽ.



Để đồ thị hàm số $y = \left|x^3 - 3x^2 + m\right|$ có 5 điểm cực trị thì

$$\begin{cases} -4 + m < 0 \\ m > 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ 0 < m < 4 . Do đó S = {1;2;3}, tổng tất cả các giá trị của S là 6 .

Cách khác: $y = \left|x^3 - 3x^2 + m\right| = \sqrt{\left(x^3 - 3x^2 + m\right)^2}$,

$$y' = \frac{\left(x^3 - 3x^2 + m\right)\left(3x^2 - 6x\right)}{\sqrt{\left(x^3 - 3x^2 + m\right)^2}}.$$

Đồ thị hàm số đã cho có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình y’ = 0 có 5 nghiệm phân biệt và y’ đổi dấu qua 5 nghiệm đó, điều này tương đương với $x^3 - 3x^2 + m$ có ba nghiệm phân biệt khác 0 và 2 .

Câu 31. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0			2		$+\infty$
y'		$-$	$\Vert$		$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-1 \ \Vert \ -\infty$		$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\left|f(x)\right| + m = 0$ có 5 nghiệm phân biệt là

A. $\left(-2;-1\right]$. **B.** $\left[-1;2\right)$. **C.** $\left(-2;-1\right)$. **D.** $\left(-2;1\right)$.

Lời giải

Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f\left(x\right)$.Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = \left|f\left(x\right)\right|$

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		2		x_3		$+\infty$
$y'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$y(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	1 ‖ $+\infty$	↘	0	↗	2	↘	0	↗	$+\infty$

Khi đó phương trình $|f(x)|+m=0$ có 5 nghiệm khi phương trình $|f(x)|=-m$ có 5 nghiệm hay đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ và $y=-m$ cắt nhau tại 5 điểm phân biệt

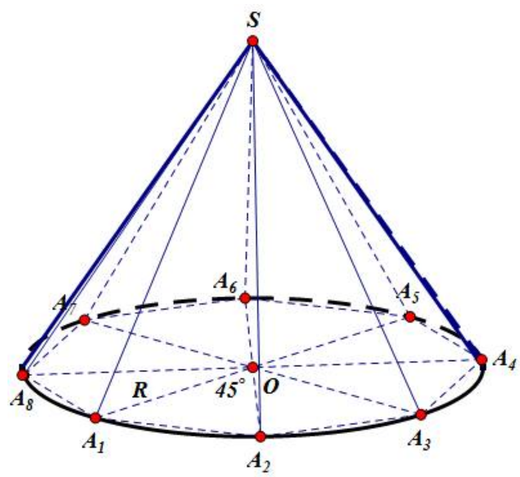
Do vậy $1\le -m<2 \Leftrightarrow -2<m\le -1$.

Câu 32. Cho hình chóp đều đỉnh S có đáy là đa giác đều 8 cạnh. Một hình nón đỉnh S có đáy là đường tròn ngoại tiếp đáy hình chóp. Tính tỉ số thể tích của khối nón và khối chóp tương ứng.

A. $\frac{\pi}{3}$. **B.** $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. **C.** $\frac{\pi}{2}$. **D.** $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

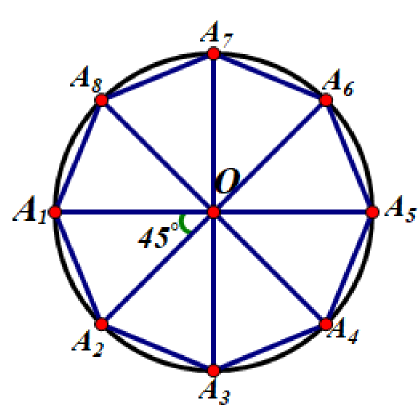
Lời giải

Chọn B



Gọi O; R lần lượt là tâm và bán kính đáy của hình nón đỉnh S, $h=SO$ là độ dài đường cao của hình nón $\Rightarrow h$ cũng là độ dài đường cao của hình chóp đều $S.A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ có đáy là đa giác đều 8 cạnh nội tiếp đáy của hình nón.

Ta có đáy nón ngoại tiếp đáy của hình chóp đều 8 cạnh như hình vẽ.



Ta thấy đa giác đều $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ được chia thành 8 tam giác cân bằng nhau có cạnh bên bằng R và góc ở đỉnh bằng $45^\circ \Rightarrow$ Diện tích của đa giác đều $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ là:

$S = 8.S_{\Delta OA_1A_2} = 8.\frac{1}{2}.OA_1.OA_2.\sin\widehat{A_1OA_2} = 2\sqrt{2}R^2$.

Gọi $V_1;V_2$ lần lượt là thể tích của khối chóp đều và khối nón đã cho.

Thể tích khối khối chóp đều đã cho là: $V_1 = \frac{1}{3}.h.S = \frac{1}{3}2\sqrt{2}R^2h$.

Thể tích của khối nón đã cho là: $V_2 = \frac{1}{3}\pi R^2h$.

Tỉ số thể tích của khối nón và khối chóp là: $\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{1}{3}\pi R^2h}{\frac{1}{3}2\sqrt{2}R^2h} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

Câu 33. Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{4x-1-\sqrt{x^2+2x+6}}{x^2+x-2}$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D = \mathbb{R}\setminus\{1;-2\}$

$\forall x_0 \in \mathbb{R}\setminus\{1;-2\}$

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{4x-1-\sqrt{x^2+2x+6}}{x^2+x-2} = \frac{4x_0-1-\sqrt{x_0^2+2x_0+6}}{x_0^2+x_0-2}$

Suy ra tiệm cận đứng nếu có của đồ thị hàm số $y = \frac{4x-1-\sqrt{x^2+2x+6}}{x^2+x-2}$ chỉ có thể là hai đường thẳng $x=1; x=-2$

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{4x-1-\sqrt{x^2+2x+6}}{x^2+x-2} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{4(x-1)+3-\sqrt{x^2+2x+6}}{(x-1)(x+2)}$

$= \lim\limits_{x\to 1}\frac{4(x-1)+\frac{9-(x^2+2x+6)}{3+\sqrt{x^2+2x+6}}}{(x-1)(x+2)} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{4(x-1)-\frac{(x-1)(x+3)}{3+\sqrt{x^2+2x+6}}}{(x-1)(x+2)}$

$= \lim\limits_{x\to 1}\frac{4-\frac{(x+3)}{3+\sqrt{x^2+2x+6}}}{(x+2)} = \frac{10}{9}$

Suy ra $x=1$ không phải là đường tiệm cận đứng

Xét $\lim\limits_{x\to -2^+}\frac{4x-1-\sqrt{x^2+2x+6}}{x^2+x-2}$

$\lim\limits_{x\to -2^+}\left(4x-1-\sqrt{x^2+2x+6}\right) = -9-\sqrt{6} < 0$

$\lim\limits_{x\to -2^+}(x-1)(x+2)=0$, và $(x-1)(x+2)>0$ với mọi x thuộc lân cận của -2 nhưng nhỏ hơn -2

Suy ra $\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{4x-1-\sqrt{x^2+2x+6}}{x^2+x-2}=-\infty$

Vậy $x=-2$ là tiệm cận đứng

Kết luận: Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng.

Câu 34. Gọi $x_0=\dfrac{a+b\sqrt{3}}{c}$ với $\left(a,b,c\in N,\dfrac{a}{c}\right.$ tối giản) là một nghiệm lớn hơn 1 của phương trình $2x\left[\left(\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{x}}-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{1-x}+1\right]=2x^2-1$. Giá trị của $P=a+b+c$ là

A. $P=6$. **B.** $P=0$. **C.** $P=2$. **D.** $P=4$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện xác định: $x\neq 0$.

$2x\left[\left(\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{x}}-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{1-x}+1\right]=2x^2-1\Leftrightarrow 3^{\frac{1}{2x}}-3^{x-1}+1=x-\dfrac{1}{2x}$

$\Leftrightarrow 3^{\frac{1}{2x}}+\dfrac{1}{2x}=3^{x-1}+x-1\ (1)$. Xét hàm số $f(t)=3^t+t\ (t\neq 0)$, $f'(t)=3^t.\ln 3+1>0$

$(1)\Leftrightarrow f\left(\dfrac{1}{2x}\right)=f(x-1)\Leftrightarrow \dfrac{1}{2x}=x-1\Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}\Rightarrow a=1,\ b=1,\ c=2$. Vậy $P=4$.

Câu 35. Cho các hàm số $f(x),f_1(x),f_2(x),\ldots$ thỏa mãn:

$$f_1(x)=f(x)=\ln\frac{e^x+1}{e^x-1};\ f_{n+1}(x)=f\left(f_n(x)\right),\forall n=1;2;3;\ldots$$

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $f_{2023}(\ln 2)=\ln 2$. **B.** $f_{2023}(\ln 3)=\ln 4$. **C.** $f_{2023}(\ln 2)=\ln 3$. **D.** $f_{2023}(\ln 3)=\ln 3$.

Lời giải

Chọn C

$f_1(x)=f(x)=\ln\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$.

Ta có:

$$f_2(x)=f\left(f_1(x)\right)=\ln\frac{e^{\ln\frac{e^x+1}{e^x-1}}+1}{e^{\ln\frac{e^x+1}{e^x-1}}-1}=\ln\frac{\frac{e^x+1}{e^x-1}+1}{\frac{e^x+1}{e^x-1}-1}=\ln e^x=x.$$

$f_3(x)=f\left(f_2(x)\right)=\ln\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$.

$f_4(x)=f\left(f_3(x)\right)=x$.

$f_5(x)=f(f_4(x))=\ln\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$ ...

Bằng quy nạp ta chứng minh được $f_{2023}(x)=\ln\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$.

Từ đó suy ra: $f_{2023}(\ln 2)=\ln\dfrac{e^{\ln 2}+1}{e^{\ln 2}-1}=\ln 3$; $f_5(\ln 3)=\ln\dfrac{e^{\ln 3}+1}{e^{\ln 3}-1}=\dfrac{3}{2}$.

Câu 36. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $(x-1).\log\left(e^{-x}+m\right)=x-2$ có 2 nghiệm thực phân biệt

A. Vô số. **B.** 11. **C.** 9. **D.** 10.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $e^{-x}+m>0$ (*).

Vì $x=1$ không là nghiệm nên phương trình nên:

$\log(e^{-x}+m)=\dfrac{x-2}{x-1}\Leftrightarrow e^{-x}+m=10^{\frac{x-2}{x-1}}$ (thỏa mãn (*)) $\Leftrightarrow m=10^{\frac{x-2}{x-1}}-e^{-x}$.

Đặt $y=g(x)=10^{\frac{x-2}{x-1}}-e^{-x}$

Ta có: $y'=\dfrac{1}{(x-1)^2}10^{\frac{x-2}{x-1}}\ln 10+e^{-x}>0,\forall x\neq 1$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		+	‖	+	
y	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\dfrac{1}{e}$	↗	10

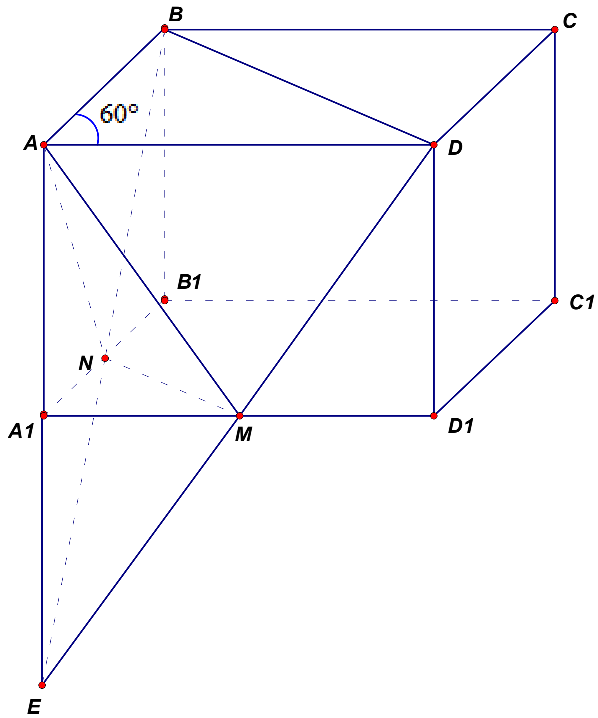
Vậy phương trình có 2 nghiệm thực phân biệt khi $-\dfrac{1}{e}<m<10$.

Suy ra các giá trị m cần tìm là: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.

Câu 37. Cho hình hộp đứng $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh $AB=AD=2$, $AA_1=\sqrt{3}$ và góc $\widehat{BAD}=60°$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh A_1D_1 và A_1B_1. Tính thể tích V của khối chóp $A.BDMN$.

A. $V=\dfrac{5}{2}$. **B.** $V=\dfrac{3}{2}$. **C.** $V=4$. **D.** $V=2$.

Lời giải



Gọi E là điểm đối xứng với A qua A_1, ta có:

$\begin{cases} A_1N // AB \\ A_1N = \dfrac{AB}{2} \end{cases} \Rightarrow N$ là trung điểm của đoạn EB

$\begin{cases} A_1M // AD \\ A_1M = \dfrac{AD}{2} \end{cases} \Rightarrow M$ là trung điểm của đoạn ED

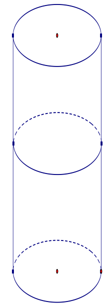
Ta có $S_{\Delta ABD} = \dfrac{1}{2}AB.AD.\sin\widehat{BAD} = \dfrac{1}{2}.2.2.\sin 60° = \sqrt{3}$

$ABCD.A_1B_1C_1D_1$ là hình hộp đứng, $AA_1 = \sqrt{3} \Rightarrow EA = 2\sqrt{3}$

$\Rightarrow V_{E.ABD} = \dfrac{1}{3}EA.S_{\Delta ABD} = \dfrac{1}{3}.2\sqrt{3}.\sqrt{3} = 2$

$\dfrac{V_{E.AMN}}{V_{E.ABD}} = \dfrac{EM}{ED}.\dfrac{EN}{EB} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow V_{E.AMN} = \dfrac{1}{4}V_{E.ABD} \Rightarrow V_{A.BDMN} = \dfrac{3}{4}V_{E.ABD} = \dfrac{3}{2}$.

Câu 38. Một con quạ đang khát nước. Nó bay rất lâu để tìm nước nhưng chẳng thấy một giọt nước nào. Mệt quá, nó đậu xuống cành cây nghỉ. Nó nhìn quanh và bỗng thấy một cái bình hình trụ có bán kính đáy là $2cm$, chiều cao $21cm$ ở dưới một gốc cây. Trong bình đang có một ít nước, khoảng cách giữa đáy cốc và mặt nước là $12cm$ (Hình vẽ). Nhìn chung quanh, quạ thấy những viên đá nhỏ nằm lay lắt ở gần đấy. Lập tức, nó dùng mỏ gắp một viên đá hình cầu có bán kính $0,6cm$ thả vào bình. Cứ như vậy, nó gắp những viên đá khác và tiếp tục thả vào bình. Giả sử các viên đá đều là hình cầu có bán kính $0,6cm$ Chẳng bao lâu, nước đã dâng lên. Để uống được nước thì con quạ cần thả vào bình ít nhất bao nhiêu viên đá biết rằng quạ muốn uống được nước trong cốc thì mặt nước phải cách miệng cốc không quá $6cm$?

A. 42. **B.** 41. **C.** 30. **D.** 27.

Lời giải

Ta có thể tích của mỗi viên đá là: $\frac{4}{3}.\pi.\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{36\pi}{125}\ (cm^3)$.

Gọi n là số viên đá mà con quạ cần thả vào cốc ($n \in \mathbb{N}^*$). Khi thả vào số viên đá đó, thể tích của nước được tăng thêm là: $V = \frac{n.36\pi}{125}\ (cm^3)$

Để con quạ uống được nước trong cốc thì mực nước trong cốc cần dâng lên thêm ít nhất là: $h = 21 - 12 - 6 = 3\ (cm)$, tức là ứng với thể tích nước tăng lên là: $V' = h.\pi.r^2 = 3.\pi.2^2 = 12\pi$

Ta có điều kiện: $V \geq V' \Leftrightarrow \frac{n.36\pi}{125} \geq 12\pi \Leftrightarrow n \geq \frac{125}{3} = 41,66$

Vậy số viên đá tối thiểu con quạ cần bỏ vào cốc là 42 viên.

Câu 39. Trong tất cả các hình chóp tứ giác đều nội tiếp mặt cầu có bán kính bằng 9, khối chóp có thể tích lớn nhất bằng bao nhiêu ?

A. $576\sqrt{2}$. **B.** 144. **C.** 576. **D.** $144\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn C

Giả sử khối chóp $S.ABCD$ là khối chóp tứ giác đều nội tiếp mặt cầu có bán kính bằng 9.

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ thì $SO \perp (ABCD)$. M là trung điểm của SA, kẻ MI vuông góc với SA và cắt SO tại I thì I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$, bán kính của mặt cầu là $IA = IS = 9$.

Đặt $IO = x$, $0 \le x \le 9$, do ΔIAO vuông tại O nên $AO = \sqrt{AI^2 - IO^2} = \sqrt{81 - x^2}$, suy ra $AC = 2\sqrt{81 - x^2}$.

Do tứ giác $ABCD$ là hình vuông nên $AB = \dfrac{AC}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.\sqrt{81 - x^2}$, suy ra $S_{\square ABCD} = AB^2$

$= 2\left(81 - x^2\right)$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} S_{\square ABCD}.SO = \dfrac{2}{3}\left(81 - x^2\right).(9 + x) = \dfrac{2}{3}\left(-x^3 - 9x^2 + 81x + 729\right)$.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{2}{3}\left(-x^3 - 9x^2 + 81x + 729\right)$ với $x \in [0;9]$.

$f'(x) = 2\left(-x^2 - 6x + 27\right)$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -9\,(l) \end{array}\right.$

Bảng biến thiên :

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy : $\max\limits_{x \in [0;9]} f(x) = f(3) = 576$.

Vậy khối chóp có thể tích lớn nhất bằng 576.

Câu 40. Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và thỏa mãn điều kiện $4x.f\left(x^2\right) + 3f(1 - x) = \sqrt{1 - x^2}$. Tích phân $I = \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng:

A. $I = \dfrac{\pi}{20}$. **B.** $I = \dfrac{\pi}{16}$. **C.** $I = \dfrac{\pi}{6}$. **D.** $I = \dfrac{\pi}{4}$.

Lời giải

Vì $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ và $4x.f\left(x^2\right) + 3f(1 - x) = \sqrt{1 - x^2}$ nên ta có

$\int\limits_0^1 \left[4x.f\left(x^2\right) + 3f(1 - x)\right]\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow \int\limits_0^1 4x.f\left(x^2\right)\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 3f(1 - x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x \;\; (1)$.

Mà $\int\limits_0^1 4x.f\left(x^2\right)\mathrm{d}x = 2\int\limits_0^1 f\left(x^2\right)\mathrm{d}\left(x^2\right) \xrightarrow{t = x^2} 2\int\limits_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 2I$

và $\int\limits_0^1 3f(1 - x)\,\mathrm{d}x = -3\int\limits_0^1 f(1 - x)\,\mathrm{d}(1 - x) \xrightarrow{u = 1 - x} 3\int\limits_0^1 f(u)\,\mathrm{d}u = 3I$

Đồng thời $\int\limits_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x \xrightarrow{x = \sin t} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t}.\cos t\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{\pi}{4}$.

Do đó, $(1) \Leftrightarrow 2I + 3I = \dfrac{\pi}{4}$ hay $I = \dfrac{\pi}{20}$.

Câu 41. Cho $f(x)\neq 0$, $f'(x)=\dfrac{3x^4+x^2-1}{x^2}.f^2(x)$, $f(1)=-\dfrac{1}{3}$. Xét $S=\sum_{k=1}^{2022} f(k)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{b}{a}-1\right)$ với $\dfrac{b}{a}$ tối giản. Tính $a+b$.

A. 4092530. **B.** 4090507. **C.** 4088485. **D.** 4086463.

Lời giải

Ta có $\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=3x^2+1-\dfrac{1}{x^2} \Rightarrow \int \dfrac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=\int\left(3x^2+1-\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$

$\Rightarrow \dfrac{-1}{f(x)}=x^3+x+\dfrac{1}{x}+C$.

Mà $f(1)=-\dfrac{1}{3}\Rightarrow C=0\Rightarrow \dfrac{-1}{f(x)}=x^3+x+\dfrac{1}{x}$.

$\Rightarrow f(x)=\dfrac{-x}{x^4+x^2+1}=\dfrac{1}{2}\dfrac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2-x^2}$

$=\dfrac{1}{2}.\dfrac{\left(x^2-x+1\right)-\left(x^2+x+1\right)}{\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x^2+x+1}-\dfrac{1}{x^2-x+1}\right)$.

$\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x(x+1)+1}-\dfrac{1}{x(x-1)+1}\right)$.

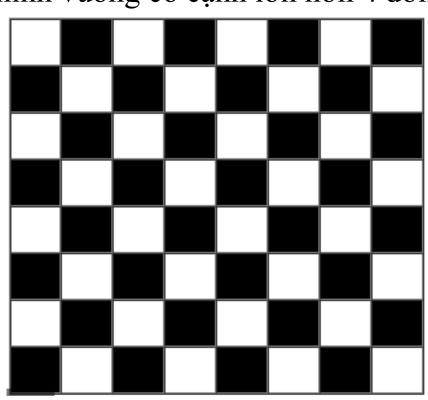
Khi đó :

$S=\sum_{k=1}^{2022} f(k)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1.2+1}-\dfrac{1}{0.1+1}+\dfrac{1}{2.3+1}-\dfrac{1}{1.2+1}+...+\dfrac{1}{2022.2023+1}-\dfrac{1}{2022.2021+1}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(-1+\dfrac{1}{2022.2023+1}\right)=\dfrac{1}{2}\left(-1+\dfrac{b}{a}\right)$.

$\Rightarrow a=2022.2023+1,\ b=1\Rightarrow a+b=4090507$.

Câu 42. Một bàn cờ vua gồm 8×8 ô vuông, mỗi ô có cạnh bằng 1 đơn vị. Một ô vừa là hình vuông hay hình chữ nhật, hai ô là hình chữ nhật,… Chọn ngẫu nhiên một hình chữ nhật trên bàn cờ. Xác suất để hình được chọn là một hình vuông có cạnh lớn hơn 4 đơn vị bằng



A. $\dfrac{5}{216}$. **B.** $\dfrac{17}{108}$. **C.** $\dfrac{51}{196}$. **D.** $\dfrac{29}{216}$.

Lời giải

Chọn A

Bàn cờ 8×8 cần 9 đoạn thẳng nằm ngang và 9 đoạn thẳng dọc. Ta coi bàn cờ vua được xác định bởi các đường thẳng $x=0,x=1,...,x=8$ và $y=0,y=1,...,y=8$.

Mỗi hình chữ nhật được tạo thành từ hai đường thẳng x và hai đường thẳng y nên có $C_8^2.C_8^2$ hình chữ nhật hay không gian mẫu là $n(\Omega)=C_9^2.C_9^2=1296$.

Gọi A là biến cố hình được chọn là hình vuông có cạnh a lớn hơn 4.

Trường hợp 1: $a=5$. Khi đó mỗi ô được tạo thành do 2 đường thẳng x cách nhau 5 đơn vị và hai đường thẳng y cách nhau 5 đơn vị có $4.4=16$ cách chọn.

Trường hợp 2: $a=6$. Khi đó mỗi ô được tạo thành do 2 đường thẳng x cách nhau 6 đơn vị và hai đường thẳng y cách nhau 6 đơn vị có $3.3=9$ cách chọn.

Trường hợp 3: $a=7$. Khi đó mỗi ô được tạo thành do 2 đường thẳng x cách nhau 7 đơn vị và hai đường thẳng y cách nhau 7 đơn vị có $2.2=4$ cách chọn.

Trường hợp 3: $a=8$. Khi đó mỗi ô được tạo thành do 2 đường thẳng x cách nhau 8 đơn vị và hai đường thẳng y cách nhau 8 đơn vị có $1.1=1$ cách chọn.

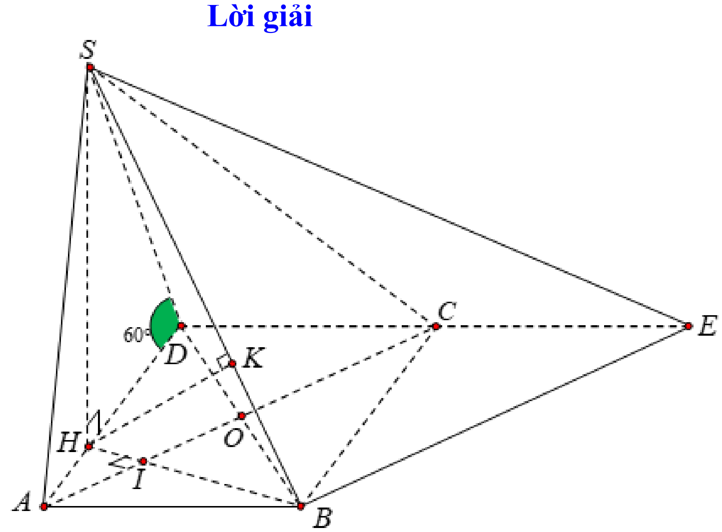
Suy ra $n(A)=16+9+4+1=30$.

Xác suất để hình được chọn là một hình vuông có cạnh lớn hơn 4 đơn vị là $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{30}{1296}=\dfrac{5}{216}$.

Câu 43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O, $AB=a$, $BC=a\sqrt{3}$. Tam giác ASO cân tại S, mặt phẳng (SAD) vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, góc giữa SD và $(ABCD)$ bằng $60°$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{3a}{2}$. **C.** $\dfrac{a}{2}$. **D.** $\dfrac{3a}{4}$.

Lời giải



Ta có $(SAD)\perp(ABCD)$, $(SAD)\cap(ABCD)=AD$; trong $mp(SAD)$, kẻ $SH\perp AD$ thì $SH\perp(ABCD)$

Mặt khác

Gọi I là trung điểm OA, vì tam giác ASO cân tại S nên $AO\perp SI$, $AO\perp SH$ $\Rightarrow HI\perp OA$

Tam giác ADC vuông tại D có $AC=\sqrt{AD^2+DC^2}=2a$ và $\tan\widehat{DAC}=\dfrac{DC}{AD}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \widehat{DAC}=30°$

Tam giác AHI vuông tại I có $AH=\dfrac{AI}{\cos 30^\circ}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\Rightarrow HD=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Tam giác ABH vuông tại A có $HB=\sqrt{AH^2+AB^2}=\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$, $AB^2=IB.HB\Rightarrow IB=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, dựng hình bình hành $ABEC$ thì $BE // AC$, $BE\subset(SBE)$

$\Rightarrow AC//(SBE)$ $d(SB,AC)=d(AC,(SBE))=d(I,(SBE))$

Mà $\dfrac{IB}{HB}=\dfrac{3}{4}$ nên $d(I,(SBE))=\dfrac{3}{4}d(H,(SBE))$

Lại có tam giác OAB là tam giác đều cạnh a nên $BI\perp AC$ $\Rightarrow BI\perp BE$, $BE\perp SH$

$\Rightarrow BE\perp(SBH)$

$\Rightarrow(SBE)\perp(SBH)$ và $(SBE)\cap(SBH)=SB$

Trong mặt phẳng (SBH), kẻ $HK\perp SB$ thì $HK\perp(SBE)$ $\Rightarrow HK=d(H,(SBE))$

Tam giác SBH vuông tại H có $\dfrac{1}{HK^2}=\dfrac{1}{SH^2}+\dfrac{1}{HB^2}$ $\Rightarrow HK=a$.

Vậy $d(H,(SBE))=HK=a$ và $d(I,(SBE))=\dfrac{3}{4}d(H,(SBE))=\dfrac{3a}{4}$.

Câu 44. Cho hàm số $y=ax^3-x^2+bx-1$ với a,b là các số thực, $a\neq 0$, $a\neq b$ sao cho đồ thị hàm số cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{5a^2-3ab+2}{a^2(b-a)}$.

A. $15\sqrt{3}$. **B.** $8\sqrt{2}$. **C.** $11\sqrt{6}$. **D.** $12\sqrt{3}$.

Lời giải

Xét phương trình $ax^3-x^2+bx-1=0$ $(*)$.

Gọi m,n,p là ba nghiệm dương của phương trình $(*)$, khi đó

Ta có $\begin{cases} m+n+p=\dfrac{1}{a}\\ mn+np+pm=\dfrac{1}{a}\\ mnp=\dfrac{1}{a}\end{cases}$

Mặt khác $\begin{cases}(m+n+p)^2\geq 3(mn+np+pm)\\ m+n+p\geq 3\sqrt[3]{mnp}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<a\leq\dfrac{1}{3\sqrt{3}}\\ 0<b\leq\dfrac{1}{3a}\end{cases}$

Xét hàm số $f(b)=\dfrac{5a^2-3ab+2}{a^2(b-a)}$; b $\in\left(0;\dfrac{1}{3a}\right]$ là hàm số nghịch biến nên

$f(b)\geq f\left(\dfrac{1}{3a}\right)=3.\dfrac{5a^2+1}{a-3a^3}=3.g(a)$

Xét hàm số $g(a)=\dfrac{5a^2+1}{a-3a^3}$; a $\in\left(0;\dfrac{1}{3\sqrt{3}}\right]$, là hàm số nghịch biến nên ta có

$g\left(a\right) \geq g\left(\dfrac{1}{3\sqrt{3}}\right) = 4\sqrt{3}$.

Vậy $P \geq 3.4\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$.

Câu 45. Cho hàm số $f\left(x\right) = x^3 - 6x^2 + 9x$. Đặt $f^k\left(x\right) = f\left(f^{k-1}\left(x\right)\right)$ với k là số tự nhiên lớn hơn 1. Hỏi phương trình $f^9\left(x\right) = 0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 19684. **B.** 9841. **C.** 19683. **D.** 9842.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $f'\left(x\right) = 3x^2 - 12x + 9$. Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1		3	4	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\nearrow$	0	4	$\searrow$	0	4	$\nearrow$

Từ bảng biến thiên ta có

$$f^k\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f^{k-1}\left(x\right) = 0 \\ f^{k-1}\left(x\right) = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f^{k-2}\left(x\right) = 0 \\ f^{k-2}\left(x\right) = 3 \\ f^{k-1}\left(x\right) = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x\right) = 0 \\ f\left(x\right) = 3 \\ f^2\left(x\right) = 3 \\ f^3\left(x\right) = 3 \\ \vdots \\ f^{k-1}\left(x\right) = 3 \end{array}\right.$$

Bài toán sẽ được giải quyết nếu tìm được số nghiệm của phương trình $f^k\left(x\right) = 3$.

+ Phương trình $f\left(x\right) = 3$ có ba nghiệm thuộc $\left(0;4\right)$.

+ Phương trình $f^2\left(x\right) = f\left(f\left(x\right)\right) = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(x\right) = x_1 \in \left(0;\, 1\right) \subset \left(0;\, 4\right) \\ f\left(x\right) = x_2 \in \left(1;\, 3\right) \subset \left(0;\, 4\right) \\ f\left(x\right) = x_3 \in \left(3;\, 4\right) \subset \left(0;\, 4\right) \end{array}\right.$.

Từ bảng biến thiên ta có với mỗi giá trị $x_1, x_2, x_3 \in \left(0;4\right)$ phương trình $f\left(x\right) = x_i, i = \overline{1,3}$ có ba nghiệm thuộc $\left(0;\, 4\right)$.

Như vậy phương trình $f^2\left(x\right) = 3$ có 9 nghiệm thuộc $\left(0;\, 4\right)$.

+ Bằng quy nạp ta chứng minh được phương trình $f^k\left(x\right) = 3$ có 3^k nghiệm thuộc $\left(0;\, 4\right)$.

Từ đó, số nghiệm của phương trình $f^k(x)=0$ là $2+3+3^2+...+3^{k-1}=2+3\dfrac{3^{k-1}-1}{2}$.

Vậy số nghiệm của phương trình $f^9(x)=0$ là $2+3\dfrac{3^{9-1}-1}{2}=9842$.

Câu 46. Cho $x;y\in\mathbb{R}$, $(x\geq 0)$ thỏa mãn: $2021^{x+3y}+2021^{xy+1}+x+1=2021^{-xy-1}+\dfrac{1}{2021^{x+3y}}-y(x+3)$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của $T=x+2y$.

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** -1. **C.** $-\dfrac{2}{3}$. **D.** 1.

Lời giải

Ta có $2021^{x+3y}+2021^{xy+1}+x+1=2021^{-xy-1}+\dfrac{1}{2021^{x+3y}}-y(x+3)$

$\Leftrightarrow 2021^{x+3y}-2021^{-(x+3y)}+x+3y=2021^{-xy-1}-2021^{xy+1}-xy-1\Leftrightarrow f(x+3y)=f(-xy-1)$.

Với $f(t)=2021^t-2021^{-t}+t$, $t\in\mathbb{R}$. $f'(t)=2021^t\ln 2021+2021^{-t}\ln 2021+1>0$, $t\in\mathbb{R}$.

$\Rightarrow f$ liên tục và đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó $f(x+3y)=f(-xy-1)\Leftrightarrow x+3y=-xy-1$ $(*)$.

Với $y=-1$: $(*)\Leftrightarrow -3=-1$ **(vô lí)**.

Với $y\neq -1$: $(*)\Leftrightarrow x=\dfrac{-1-3y}{1+y}$. Vì $x\geq 0$ nên $-1<y\leq -\dfrac{1}{3}$.

Từ $(*)$ ta có:

$x+3y=-xy-1\Leftrightarrow x+2y=-y-xy-1\Leftrightarrow x+2y=-(x+2y)y+2y^2-y-1$.

$\Leftrightarrow (x+2y)(1+y)=2y^2-y-1\Leftrightarrow x+2y=\dfrac{2y^2-y-1}{y+1}\Leftrightarrow T=\dfrac{2y^2-y-1}{y+1}$.

Xét $f(y)=\dfrac{2y^2-y-1}{y+1}$, $y\in\left(-1;-\dfrac{1}{3}\right]$.

$f'(y)=\dfrac{2y^2+4y}{(y+1)^2}<0,\forall y\in\left(-1;-\dfrac{1}{3}\right]$. Do đó $\min\limits_{\left[-1;-\frac{1}{3}\right]} f(y)=f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{2}{3}$.

Vậy $\min T=-\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-\dfrac{1}{3}\\ x=0\end{cases}$.

Câu 47. Số nghiệm của phương trình $\dfrac{x^2}{2}+x-\ln\left(x^2-2\right)=2022$ là

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x^2}{2}+x-\ln\left(x^2-2\right)$ với $x\in\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

Ta có $f'(x)=x+1-\dfrac{2x}{x^2-2}$; $f''(x)=1+\dfrac{2x^2+4}{\left(x^2-2\right)^2}>0, \forall x\in\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

Nên suy ra hàm số $f'(x)=x+1-\dfrac{2x}{x^2-2}$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)$ và $\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

Mặt khác $f'(2).f'\left(\sqrt{3}\right)=1.\left(1-\sqrt{3}\right)<0$ và $f'(-3).f'(-2)=-\dfrac{8}{7}.1<0$ nên $f'(x)$ có đúng một nghiệm $a\in\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)$ và đúng một nghiệm $b\in\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		a		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		b		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$				$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(a)$	$\nearrow$	$+\infty$		$+\infty$	$\searrow$	$f(b)$	$\nearrow$	$+\infty$

Ta có $f(a)<f\left(-\sqrt{3}\right)=\dfrac{3}{2}-\sqrt{3}<2022$ và $f(b)<f\left(\sqrt{3}\right)=\dfrac{3}{2}+\sqrt{3}<2022$

Nên từ bảng biến thiên suy ra phương trình $\dfrac{x^2}{2}+x-\ln\left(x^2-2\right)=2022$ có 4 nghiệm.

Câu 48. Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_{\sqrt{3}}\dfrac{x+y}{x^2+y^2+xy+2}=x(x-3)+y(y-3)+xy$. Tìm giá trị lớn nhất của $P=\dfrac{3x+2y+1}{x+y+6}$.

A. 2 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải

Ta có $\log_{\sqrt{3}}\dfrac{x+y}{x^2+y^2+xy+2}=x(x-3)+y(y-3)+xy$

$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{3}}(x+y)+3(x+y)+2=\log_{\sqrt{3}}\left(x^2+y^2+xy+2\right)+\left(x^2+y^2+xy+2\right)$

$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{3}}(x+y)+3(x+y)+\log_{\sqrt{3}}3=\log_{\sqrt{3}}\left(x^2+y^2+xy+2\right)+\left(x^2+y^2+xy+2\right)$

$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{3}}\left[3(x+y)\right]+3(x+y)=\log_{\sqrt{3}}\left(x^2+y^2+xy+2\right)+\left(x^2+y^2+xy+2\right)$ (*).

Xét hàm số $f(t)=\log_{\sqrt{3}}t+t$, với $t>0$.

có $f'(t)=\dfrac{1}{t.\ln\sqrt{3}}+1>0$, $\forall t>0$.

Vậy hàm số $f(t)$ liên tục và đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Do đó: $f\left(3(x+y)\right)=f\left(x^2+y^2+xy+2\right)\Leftrightarrow 3(x+y)=x^2+y^2+xy+2$ (1).

Từ (1) $\Leftrightarrow xy=(x+y)^2-3(x+y)+2$.

Ta có $x = x + xy - xy = x\left(y+1\right) - xy \le \left(\dfrac{x+y+1}{2}\right)^2 - xy$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y + 1$.

Do đó từ $\left(1\right)$, suy ra: $x \le \dfrac{\left(x+y+1\right)^2}{4} - \left(x+y\right)^2 + 3\left(x+y\right) - 2$.

Đặt $t = x + y$, $t > 0$.

Suy ra: $P = \dfrac{2\left(x+y\right)+1+x}{x+y+6} \le \dfrac{2t+1+\dfrac{\left(t+1\right)^2}{4} - t^2 + 3t - 2}{t+6} = \dfrac{-3t^2+22t-3}{4\left(t+6\right)} = f\left(t\right)$.

Ta có: $f'\left(t\right) = \dfrac{-3t^2 - 36t + 135}{4\left(t+6\right)^2} = 0 \Leftrightarrow t = 3$ (nhận).

Bảng biến thiên

t	0		3		$+\infty$
$f'\left(t\right)$		$+$	0	$-$	
$f\left(t\right)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Dựa vào BBT, ta có $\max P = \max\limits_{\left(0;+\infty\right)} f\left(t\right) = f\left(3\right) = 1$ khi và chỉ khi $\begin{cases} x = y+1 \\ x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$.

Câu 49. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Góc tạo bởi mặt bên $\left(SAB\right)$ với đáy bằng α. Tỉ số diện tích của tam giác SAB và hình bình hành $ABCD$ bằng k. Mặt phẳng $\left(P\right)$ đi qua AB và chia hình chóp $S.ABCD$ thành hai phần có thể tích bằng nhau. Gọi $\left(\beta\right)$ là góc tạo bởi mặt phẳng $\left(P\right)$ và mặt đáy. Tính $\cot\beta$ theo k và α.

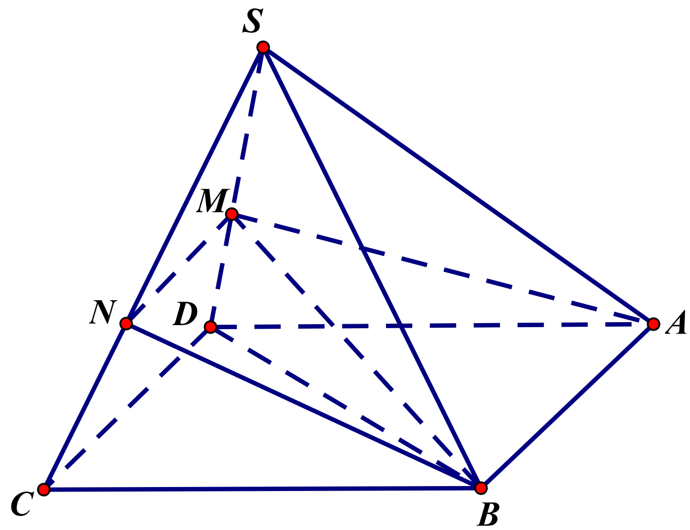
A. $\cot\beta = \cot\alpha + \dfrac{\sqrt{5}+1}{k\sin\alpha}$

B. $\cot\beta = \tan\alpha + \dfrac{\sqrt{5}+1}{k\sin\alpha}$

C. $\cot\beta = \cot\alpha + \dfrac{\sqrt{5}-1}{k\sin\alpha}$

D. $\cot\beta = \tan\alpha + \dfrac{\sqrt{5}-1}{k\sin\alpha}$

Lời giải



Giải sử mặt phẳng (P) cắt SD, SC lần lượt tại M, N. Khi đó $MN // CD$.

Đặt: $\frac{SM}{SD} = \frac{SN}{SC} = m > 0$

Ta có: $\begin{cases} \frac{V_{S.MNB}}{V_{SDCB}} = \frac{SM}{SD} \cdot \frac{SN}{SC} = m^2 \\ \frac{V_{S.AMB}}{V_{S.ABD}} = \frac{SM}{SD} = m (*) \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{V_{S.ABMN}}{2V_{S.ABCD}} = m^2 + m \Leftrightarrow m^2 + m = 1 \Leftrightarrow m = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \ (m > 0)$

Từ $(*) \Rightarrow V_{S.ABM} = m.V_{S.ABD} = m.(V_{S.ABM} + V_{\mathrm{M.ABD}}) \Rightarrow \frac{V_{S.ABM}}{V_{M.ABD}} = \frac{m}{1-m} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \ (1)$

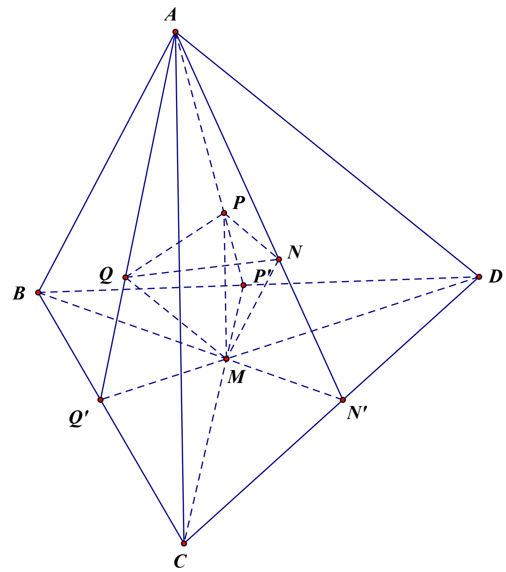
Mặt khác: $\frac{V_{S.ABM}}{V_{M.ABD}} = \frac{S_{SAB}.Sin(\alpha - \beta)}{S_{ABD}.Sin\beta} \ (2)$

Từ $(1),(2) \Rightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{k.S_{ABCD}.\sin(\alpha-\beta)}{\frac{1}{2}.S_{ABCD}.\sin\beta} \Leftrightarrow \cot\beta = \cot\alpha + \frac{1+\sqrt{5}}{k.\sin\alpha}$. Suy ra **chọn A.**

Câu 50. Cho tứ diện $ABCD$ có thể tích là V. Điểm M thay đổi trong tam giác BCD. Các đường thẳng qua M và song song với AB, AC, AD lần lượt cắt các mặt phẳng (ACD), (ABD), (ABC) tại N, P, Q. Giá trị lớn nhất của thể tích khối tứ diện $MNPQ$ là

A. $\frac{V}{27}$. **B.** $\frac{V}{16}$. **C.** $\frac{V}{8}$. **D.** $\frac{V}{54}$.

Lời giải



❍ Tam giác ABN' có $MN // AB \Rightarrow \dfrac{MN}{AB} = \dfrac{N'M}{N'B}$.

❍ Tam giác ACP' có $MP // AC$ $\dfrac{MP}{AC} = \dfrac{P'M}{P'C}$.

❍ Tam giác ADQ' có $QM // AD \Rightarrow \dfrac{MQ}{AD} = \dfrac{Q'M}{Q'D}$.

Khi đó: $\dfrac{MN}{AB} + \dfrac{MP}{AC} + \dfrac{MQ}{AD} = \dfrac{N'M}{N'B} + \dfrac{P'M}{P'C} + \dfrac{Q'M}{Q'D}$

Mà $\dfrac{N'M}{N'B} + \dfrac{P'M}{P'C} + \dfrac{Q'M}{Q'D} = \dfrac{S_{MCD}}{S_{BCD}} + \dfrac{S_{MBD}}{S_{BCD}} + \dfrac{S_{MBC}}{S_{BCD}} = 1$ nên $\dfrac{MN}{AB} + \dfrac{MP}{AC} + \dfrac{MQ}{AD} = 1$

Lại có $1^3 = \left(\dfrac{MN}{AB} + \dfrac{MP}{AC} + \dfrac{MQ}{AD}\right)^3 \ge \left(3\sqrt[3]{\dfrac{MN}{AB}.\dfrac{MP}{AC}.\dfrac{MQ}{AD}}\right)^3$ (Cauchy)

$\Leftrightarrow MN.MP.MQ \le \dfrac{1}{27}AB.AC.AD \Rightarrow MN.MP.MQ$ lớn nhất khi $\dfrac{MN}{AB} = \dfrac{MP}{AC} = \dfrac{MQ}{AD}$

$\Rightarrow M$ là trọng tâm tam giác $BCD \Rightarrow \dfrac{MN}{AB} = \dfrac{MP}{AC} = \dfrac{MQ}{AD} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow (NPQ)//(BCD)$,

$\dfrac{S_{NPQ}}{S_{N'P'Q'}} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^2$, Mà $S_{N'P'Q'} = \dfrac{1}{4}S_{BCD}$ nên $S_{NPQ} = \dfrac{1}{9}S_{BCD}$ và $d\left(M,(NPQ)\right) = \dfrac{1}{2}d\left(A,(BCD)\right)$

Vậy giá trị lớn nhất của thể tích khối tứ diện $MNPQ$ là $V_{MNPQ} = \dfrac{1}{3}S_{NPQ}.d\left(M,(NPQ)\right)$

$\Leftrightarrow V_{MNPQ} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{9}S_{BCD}.\dfrac{1}{3}d\left(A,(BCD)\right) = \dfrac{V}{27}$, với $V_{ABCD} = \dfrac{1}{3}S_{BCD}.d\left(A,(BCD)\right) = V$.