HỘI CÁC TRƯỜNG THPT CHUYÊN
VÙNG DH&ĐB BẮC BỘ

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi gồm 01 trang)

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
LẦN THỨ XIV, NĂM 2023
ĐỀ THI MÔN: TOÁN HỌC - LỚP 10
Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian giao đề)
Ngày thi: 15 tháng 7 năm 2023

Câu 1. (4,0 điểm) Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n, tồn tại nhiều nhất một đa thức $P(x)$ có bậc n, hệ số thực và thỏa mãn $P(x)P(x+1)=P(x^2+ax+b)$; với a,b là các số thực cho trước.

Câu 2. (4,0 điểm) Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+2}+\frac{b}{c+2}+\frac{c}{a+2}\leq 1.$$

Câu 3. (4,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) có AD là đường phân giác trong (D thuộc BC). Gọi E, F lần lượt là điểm chính giữa cung CA chứa B, cung AB chứa C của đường tròn (O). Đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE cắt AB tại M. Đường tròn ngoại tiếp tam giác CDF cắt AC tại N.

a) Chứng minh rằng bốn điểm B,M,N,C cùng nằm trên một đường tròn.

b) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN. Gọi AP, AQ lần lượt là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABN, ACM. Chứng minh rằng các đường thẳng BQ, CP, AI đồng quy.

Câu 4. (4,0 điểm) Cho số nguyên dương n. Chứng minh rằng nếu tồn tại các số nguyên dương a,b,c sao cho $2027^n=(a+bc)(b+ac)$ thì n là số chẵn.

Câu 5. (4,0 điểm) Một số nguyên dương m được gọi là "tốt" nếu tồn tại các số nguyên dương a,b,c,d sao cho $m\leq a<b\leq c<d\leq m+49$ và $ad=bc$.

a) Chứng minh rằng số nguyên dương m là "tốt" khi và chỉ khi tồn tại hai số nguyên dương x,y sao cho $xy\geq m$ và $(x+1)(y+1)\leq m+49$.

b) Tìm số "tốt" lớn nhất.

……………………HẾT……………………

Họ và tên thí sinh: …………………………………… Số báo danh:………………………

Lưu ý: - Thí sinh **không** được sử dụng tài liệu.
- Cán bộ coi thi **không** giải thích gì thêm.

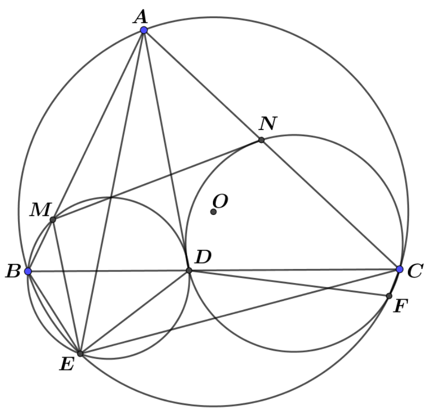
HỘI CÁC TRƯỜNG THPT CHUYÊN
VÙNG DH&ĐB BẮC BỘ

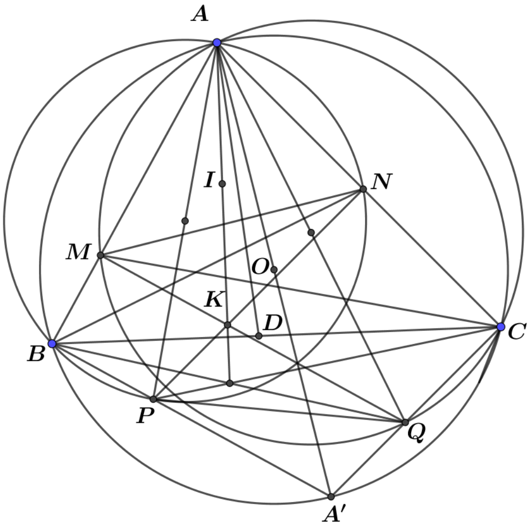
KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
LẦN THỨ XIV, NĂM 2023
HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN: TOÁN HỌC - LỚP 10

HƯỚNG DẪN CHẤM

(Hướng dẫn chấm gồm 04 trang)

Câu 1. (4,0 điểm) Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n, tồn tại nhiều nhất một đa thức $P(x)$ có bậc n, hệ số thực và thỏa mãn $P(x)P(x+1)=P(x^2+ax+b)$ (1); với a,b là các số thực cho trước. ***(Dựa theo: THPT Chuyên Cao Bằng)***	**Điểm**
Giả sử đa thức $P(x)$ bậc n và thỏa mãn (1), khi đó $P(x)$ là đa thức monic.	**0,5**
Giả sử tồn tại đa thức $Q(x)$ có hệ số thực, $Q(x)\neq P(x)$, $\deg Q(x)=n$ và thỏa mãn (1). Khi đó đa thức $R(x)=P(x)-Q(x)$ có $\deg R(x)\le n-1$.	**1,0**
Do $P(x)=Q(x)+R(x)$ thỏa mãn (1) nên $\left[Q(x)+R(x)\right].\left[Q(x+1)+R(x+1)\right]=Q(x^2+ax+b)+R(x^2+ax+b)$ $\Rightarrow Q(x).Q(x+1)+Q(x).R(x+1)+R(x).Q(x+1)+R(x).R(x+1)$ $=Q(x^2+ax+b)+R(x^2+ax+b)$ $\Rightarrow Q(x).R(x+1)+R(x).Q(x+1)+R(x).R(x+1)=R(x^2+ax+b)$ (2)	**1,5**
Vế phải (2) là đa thức bậc $2\deg R(x)$, vế trái (2) là đa thức bậc $\deg Q(x)+\deg R(x)$, do đó $2\deg R(x)=n+\deg R(x)\Rightarrow n=\deg R(x)$, mâu thuẫn. Điều phải chứng minh.	**1,0**
Câu 2. (4,0 điểm) Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng $\dfrac{a}{b+2}+\dfrac{b}{c+2}+\dfrac{c}{a+2}\le 1$. ***(Nguồn: THPT Chuyên Thái Bình)***	**Điểm**
Biến đổi BĐT cần chứng minh trở thành	**1,5**

$\sum a(a+2)(c+2) \le (a+2)(b+2)(c+2) \Leftrightarrow ab^2+bc^2+ca^2+2(a^2+b^2+c^2) \le abc+8$ $\Leftrightarrow ab^2+bc^2+ca^2 \le abc+2.$	
Giả sử b nằm giữa hai số a,c. Khi đó $(b-a)(b-c) \le 0 \Leftrightarrow b^2+ac \le b(a+c).$	**1,0**
Do đó $ab^2+bc^2+ca^2 = a(b^2+ac)+bc^2 \le ab(a+c)+bc^2 = b(a^2+c^2)+abc.$	**0,5**
Để chứng minh $ab^2+bc^2+ca^2 \le abc+2$ ta chỉ cần chứng minh $b(a^2+c^2) \le 2.$ Ta có $2-b(a^2+c^2) = 2-b(3-b^2) = (b-1)^2(b+2) \ge 0.$ Do đó ta có bất đẳng thức cần chứng minh là đúng. Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$ hoặc $a=0, b=1, c=\sqrt{2}$ và các hoán vị.	**1,0**
Câu 3. (4,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) có AD là đường phân giác trong (D thuộc BC). Gọi E, F lần lượt là điểm chính giữa cung CA chứa B, cung AB chứa C của đường tròn (O). Đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE cắt AB tại M. Đường tròn ngoại tiếp tam giác CDF cắt AC tại N. a) Chứng minh rằng bốn điểm B, M, N, C cùng nằm trên một đường tròn. b) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN. Gọi AP, AQ lần lượt là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABN, ACM. Chứng minh rằng các đường thẳng BQ, CP, AI đồng quy. ***(Nguồn: THPT Chuyên Nguyễn Tất Thành – Yên Bái)***	**Điểm**
Xét hình vẽ sau: (các trường hợp hình vẽ khác chứng minh tương tự)  	
a) Ta có $EA = EC, \widehat{DCE} = \widehat{MAE}, \widehat{DEC} = \widehat{BDE} - \widehat{DCE} = \widehat{BME} - \widehat{BAE} = \widehat{MEA}$ $\Rightarrow \Delta EDC = \Delta EMA\ (g.c.g)$ suy ra $CD = AM$. Chứng minh tương tự ta có $BD = AN$.	**0,5**
Vì AD là phân giác của góc A nên $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{AC} \Leftrightarrow \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AN}{AM} \Leftrightarrow AM.AB = AN.AC$ suy ra tứ giác $BMNC$ nội tiếp một đường tròn.	**0,5**

	
b) Trước hết ta chứng minh AI vuông góc với BC. Thật vậy, $\widehat{IAM}=90^\circ-\dfrac{\widehat{AIM}}{2}=90^\circ-\widehat{ANM}=90^\circ-\widehat{ABC}$ nên AI vuông góc BC.	**0,5**
Vì AP,AQ lần lượt là đường kính của các đường tròn $(ABN),(ACM)$ nên $\widehat{ABP}=\widehat{ACQ}=90^\circ$. Gọi A' là giao điểm của BP và CQ thì AA' là đường kính của (O). Mặt khác $\widehat{AMQ}=\widehat{ANP}=90^\circ$ nên $NP//CA'$ và $MQ//A'B$. Gọi K là giao điểm của MQ và NP thì tứ giác $AMKN$ nội tiếp đường tròn đường kính AK nên A,I,K thẳng hàng.	**1,0**
Ta có $\dfrac{\sin\widehat{QPC}}{\sin\widehat{KPC}}=\dfrac{\sin\widehat{QPC}}{\sin\widehat{PCQ}}=\dfrac{CQ}{PQ}$ (1) và $\dfrac{\sin\widehat{KQB}}{\sin\widehat{PQB}}=\dfrac{\sin\widehat{PBQ}}{\sin\widehat{PQB}}=\dfrac{PQ}{BP}$ (2)	**0,5**
Lại có $\widehat{BMC}=\widehat{BNC}\Rightarrow\widehat{CMQ}=\widehat{BNP}\Rightarrow\widehat{CAQ}=\widehat{BAP}\Rightarrow\Delta BAP\backsim\Delta CAQ\ (g.g)$. Suy ra $\dfrac{BP}{CQ}=\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AN}{AM}=\dfrac{AN}{AK}.\dfrac{AK}{AM}=\dfrac{\sin\widehat{AKN}}{\sin\widehat{AKM}}$ (3) Từ (1), (2) và (3) suy ra $\dfrac{\sin\widehat{AKN}}{\sin\widehat{AKM}}.\dfrac{\sin\widehat{QPC}}{\sin\widehat{KPC}}.\dfrac{\sin\widehat{KQB}}{\sin\widehat{PQB}}=1$, do vậy AK,CP,BQ đồng quy.	**1,0**
Câu 4. (4,0 điểm) Cho số nguyên dương n. Chứng minh rằng nếu tồn tại các số nguyên dương a,b,c sao cho $2027^n=(a+bc)(b+ac)$ thì n là số chẵn. ***(Nguồn: THPT Chuyên Quốc Học – Thừa Thiên Huế)***	**Điểm**
Từ giả thiết suy ra tồn tại p,q nguyên dương thỏa mãn $\begin{cases}a+bc=2027^p\\b+ac=2027^q\end{cases}$ (1). Không mất tổng quát, giả sử $a\ge b$. Từ (1) suy ra $\begin{cases}a+b+bc+ac=(a+b)(c+1)=2027^p+2027^q\\b-a+ac-bc=(a-b)(c-1)=2027^q-2027^p\end{cases}$ (2).	**1,0**
Vì $a\ge b$ nên $q\ge p$, do đó (2) $\Leftrightarrow\begin{cases}(a+b)(c+1)=2027^p(2027^{q-p}+1)\\(a-b)(c-1)=2027^p(2027^{q-p}-1)\end{cases}$ (3).	**1,0**

Nếu $2027 \mid c+1$ thì $2027 \nmid c-1$, do đó $(3) \Rightarrow 2027^p \mid a-b \Rightarrow a+bc \mid a-b$ (*). Mặt khác, từ $\lvert a+bc \rvert > \lvert a-b \rvert$ và (*) suy ra $a-b=0 \Rightarrow (a+bc)(b+ac)=(a+bc)^2=2027^n \Rightarrow n \vdots 2.$	**1,0**
Nếu $2027 \nmid c+1$ thì $2027^p \mid a+b$, do đó $a+bc \mid a+b$ (**). Vì $a+bc \ge a+b$ nên (**) suy ra $c=1$. Khi đó $(a+bc)(b+ac)=(a+b)^2=2027^n \Rightarrow n \vdots 2$. Vậy trong mọi trường hợp ta luôn có $n \vdots 2$.	**1,0**
Câu 5. (4,0 điểm) Một số nguyên dương m được gọi là "tốt" nếu tồn tại các số nguyên dương a,b,c,d sao cho $m \le a < b \le c < d \le m+49$ và $ad=bc.$ a) Chứng minh rằng số nguyên dương m là "tốt" khi và chỉ khi tồn tại hai số nguyên dương x,y sao cho $xy \ge m$ và $(x+1)(y+1) \le m+49.$ b) Tìm số "tốt" lớn nhất. ***(Nguồn : THPT Chuyên Vĩnh Phúc)***	**Điểm**
a) Chiều thuận: Giả sử m là tốt, khi đó tồn tại các số nguyên dương a,b,c,d sao cho $$m \le a < b \le c < d \le m+49 \text{ và } ad=bc.$$ Từ $ad=bc$, suy ra $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. Khi đó biểu diễn được $a=uv;\ b=rv;\ c=us;\ d=rs$, với u,v,r,s là các số nguyên dương.	**0,5**
Từ $a<b \Rightarrow u<r$, suy ra $r \ge u+1$. Từ $a<c \Rightarrow v<s$, suy ra $s \ge v+1$.	**0,5**
Khi đó $uv=a \ge m$ và $(u+1)(v+1) \le rs = d \le m+49.$ Như vậy đã tồn tại cặp $(x,y)=(u,v)$ thoả mãn.	**0,5**
Chiều đảo: Giả sử tồn tại hai số nguyên dương $x,\ y$ sao cho $xy \ge m$ và $(x+1)(y+1) \le m+49.$ Không mất tính tổng quát, giả sử $x \le y.$ Suy ra $$m \le xy < x(y+1) \le y(x+1) < (x+1)(y+1) \le m+49.$$	**1,0**
Đặt $a=xy; b=x(y+1); c=y(x+1); d=(x+1)(y+1)$ thì $m \le a < b \le c < d \le m+49$ và $ad=bc.$ Vậy m là tốt.	**0,5**
b) Tìm số "tốt" lớn nhất: Giả sử m là số "tốt", khi đó tồn x,y nguyên dương sao cho $$xy \ge m \text{ và } (x+1)(y+1) \le m+49 \quad (*)$$ Khi đó ta có $m+49 \ge (x+1)(y+1) \ge \left(\sqrt{xy}+1\right)^2 \ge \left(\sqrt{m}+1\right)^2 \Rightarrow m \le 576$. Dấu bằng xảy ra khi $x=y=24.$ Vậy số "tốt" lớn nhất bằng 576.	**1,0**

-------------- HẾT --------------