

Bài 1. (5,0 điểm)

1) Rút gọn biểu thức: $A = \frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}(3+\sqrt{5})}{\sqrt{10}+\sqrt{2}}$.

2) Cho biểu thức: $P = \frac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3} + \frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$ (với $x \geq 0; x \neq 1$).

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P .

Bài 2. (4,0 điểm)

1) Cho $x; y$ là hai số thực thỏa mãn đẳng thức: $(x-\sqrt{x^2+5})(y-\sqrt{y^2+5})=5$. Tính giá trị của biểu thức: $T = x^{2024} - y^{2024}$.

2) Giải phương trình: $x^2 - 8x + 8 + 4\sqrt{2x-3} = 0$.

Bài 3. (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) đường kính BC ($AB < AC$). Gọi E là trung điểm của AC . Tiếp tuyến tại C của đường tròn (O) cắt tia OE tại F . Đoạn thẳng BF cắt đường tròn (O) tại H .

1) Chứng minh: $FH.FB = FE.FO$.

2) Chứng minh: $\angle FEH = \angle OHB$.

3) Chứng minh: AH vuông góc với HE .

Bài 4. (3,0 điểm)

1) Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn phương trình: $x^3 - x^2y + 3x - 2y - 5 = 0$.

2) Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh: $p^2 - 1$ chia hết cho 24.

Bài 5. (2,0 điểm)

1) Cho x, y, z là các số thực dương có tổng bằng 3. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{1+y^2} + \frac{y}{1+z^2} + \frac{z}{1+x^2} > \frac{2024}{2023}$$

2) Cho một đa giác đều có 2023 đỉnh. Người ta ghi lên mỗi đỉnh của đa giác số 1 hoặc số 2. Biết rằng có tất cả 1013 số 1 và 1010 số 2, các số trên ba đỉnh liên tiếp bất kì không đồng thời bằng nhau. Hãy tính tổng của tất cả các tích ba số trên ba đỉnh liên tiếp của đa giác trên.

-----Hết-----

(Học sinh được sử dụng máy tính cầm tay không có thể nhớ)

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Giám thị 1: Giám thị 2:

HƯỚNG DẪN CHẤM

I. Những điều cần lưu ý:

- Các cách giải khác đúng cho điểm tương đương.
- Điểm của từng ý không chia nhỏ hơn 0,25 điểm.
- Điểm toàn bài giữ nguyên không làm tròn.

II. Nội dung

Bài 1. (5,0 điểm)

- 1) Rút gọn biểu thức: $A = \frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}(3+\sqrt{5})}{\sqrt{10}+\sqrt{2}}$.
- 2) Cho biểu thức: $P = \frac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3} + \frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$ (với $x \geq 0; x \neq 1$).
- a) Rút gọn biểu thức P .
- b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P .

Ý	Nội dung	Điểm
1	$A = \frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}(3+\sqrt{5})}{\sqrt{10}+\sqrt{2}}$ $= \frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}(3+\sqrt{5}) \cdot \sqrt{2} \cdot (\sqrt{5}-1)}{8}$	0,25
	$= \frac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}(3\sqrt{5}+5-3-\sqrt{5})}{8}$	0,25
	$= \frac{\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2(2\sqrt{5}+2)}}{8}$	0,25
	$= \frac{ \sqrt{5}-1 \cdot 2 \cdot (\sqrt{5}+1)}{8}$	0,25
	$= \frac{(\sqrt{5}-1) \cdot (\sqrt{5}+1)}{4}$	0,25
	$= \frac{5-1}{4}$	0,25
	$= 1.$	0,25
	<p>Vậy $A = 1$</p>	0,25
2a	<p>Với $x \geq 0; x \neq 1$ ta có</p> $P = \frac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3} + \frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$ $= \frac{15\sqrt{x}-11}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} - \frac{3\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$	0,5
	$= \frac{15\sqrt{x}-11 - (3\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3) - (2\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}$	0,5

	$= \frac{15\sqrt{x} - 11 - 3x - 9\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + 6 - 2x + 2\sqrt{x} - 3\sqrt{x} + 3}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)}$	0,25
	$= \frac{-5x + 7\sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)}$	0,5
	$= \frac{(\sqrt{x} - 1)(-5\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)}$	0,5
	$= \frac{2 - 5\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3}$	0,25
2b	Ta có: $P = \frac{2 - 5\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3} = \frac{17 - 5(\sqrt{x} + 3)}{\sqrt{x} + 3} = \frac{17}{\sqrt{x} + 3} - 5$ Với $x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} + 3 \geq 3 \Rightarrow \frac{17}{\sqrt{x} + 3} \leq \frac{17}{3} \Rightarrow \frac{17}{\sqrt{x} + 3} - 5 \leq \frac{2}{3} \Rightarrow P \leq \frac{2}{3}$.	0,25
	Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = 0$ (tm) Vậy P có giá trị lớn nhất bằng $\frac{2}{3}$ khi $x = 0$.	0,25

Bài 2. (4,0 điểm)

- Cho $x; y$ là hai số thực thỏa mãn đẳng thức: $(x - \sqrt{x^2 + 5})(y - \sqrt{y^2 + 5}) = 5$. Tính giá trị của biểu thức: $T = x^{2024} - y^{2024}$.
- Giải phương trình: $x^2 - 8x + 8 + 4\sqrt{2x - 3} = 0$.

ý	Nội dung	Điểm
1	$(x - \sqrt{x^2 + 5})(y - \sqrt{y^2 + 5}) = 5$ (*) Nhân cả 2 vế của (*) với $x + \sqrt{x^2 + 5}$ ta được $(x + \sqrt{x^2 + 5})(x - \sqrt{x^2 + 5})(y - \sqrt{y^2 + 5}) = 5(x + \sqrt{x^2 + 5})$ $\Leftrightarrow (x^2 - x^2 - 5)(y - \sqrt{y^2 + 5}) = 5(x + \sqrt{x^2 + 5})$ $\Leftrightarrow -5(y - \sqrt{y^2 + 5}) = 5(x + \sqrt{x^2 + 5})$ $\Leftrightarrow y - \sqrt{y^2 + 5} = -x - \sqrt{x^2 + 5}$ (1)	0,5
	Tương tự: Nhân cả 2 vế của (*) với $y + \sqrt{y^2 + 5}$ ta thu được $x - \sqrt{x^2 + 5} = -y - \sqrt{y^2 + 5}$ (2)	0,5
	Cộng từng vế của (1) và (2) ta được $x - \sqrt{x^2 + 5} + y - \sqrt{y^2 + 5} = -y - \sqrt{y^2 + 5} - x - \sqrt{x^2 + 5}$ $\Leftrightarrow x + y = -x - y$	

	$\Leftrightarrow x + y = 0 \Leftrightarrow x = -y$	0,5
	Với $x = -y \Rightarrow x^{2024} = y^{2024} \Rightarrow T = x^{2024} - y^{2024} = 0$	0,5
	$x^2 - 8x + 8 + 4\sqrt{2x-3} = 0$. Điều kiện: $x \geq \frac{3}{2}$.	0,25
	Với $x \geq \frac{3}{2}$, ta có phương trình tương đương: $x^2 - 8x + 8 = -4\sqrt{2x-3}$ $\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 2x - 3 - 4\sqrt{2x-3} + 4$ $\Leftrightarrow (x-3)^2 = (\sqrt{2x-3} - 2)^2$	0,5
2	$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3 = \sqrt{2x-3} - 2 \\ x-3 = 2 - \sqrt{2x-3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x-3} = x-1 \text{ (1)} \\ \sqrt{2x-3} = 5-x \text{ (2)} \end{cases}$	0,5
	Giải (1): $\sqrt{2x-3} = x-1$ $\Leftrightarrow 2x-3 = (x-1)^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ (tm)}$	0,25
	Giải (2): $\sqrt{2x-3} = 5-x$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ 2x-3 = (5-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ x^2 - 12x + 28 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ x = 6 \pm 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 6 - 2\sqrt{2} \text{ (tm)}$	0,25
	Vậy phương trình có tập nghiệm là $S = \{2; 6 - 2\sqrt{2}\}$.	0,25

Bài 3. (6,0 điểm)

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) đường kính BC ($AB < AC$). Gọi E là trung điểm của AC . Tiếp tuyến tại C của đường tròn (O) cắt tia OE tại F . Đoạn thẳng BF cắt đường tròn (O) tại H .

- 1) Chứng minh: $FH.FB = FE.FO$.
- 2) Chứng minh: $\angle FEH = \angle OHB$.
- 3) Chứng minh: AH vuông góc với HE .

ý	Nội dung	Điểm
1	Xét (O) : E là trung điểm của dây AC (không đi qua tâm) $\Rightarrow OE \perp AC$ hay	0,25

	$CE \perp OF$	
	FC là tiếp tuyến của (O) tại $C \Rightarrow FC \perp OC \Rightarrow \triangle OCF$ vuông tại C	0,25
	$\triangle OCF$ vuông tại C , đường cao CE có: $CF^2 = FE.FO$ (Hệ thức lượng) (1)	0,5
	H thuộc đường tròn đường kính $BC \Rightarrow \triangle BHC$ vuông tại $H \Rightarrow CH \perp BH$ hay $CH \perp BF$	0,25
	$\triangle FBC$ vuông tại C , đường cao CH có: $CF^2 = FH.FB$ (Hệ thức lượng) (2)	0,5
	Từ (1) và (2) suy ra: $FE.FD = FH.FB$	0,25
2	Ta có $FE.FO = FH.FB \Rightarrow \frac{FE}{FH} = \frac{FB}{FO}$	0,25
	$\triangle FEH$ và $\triangle FBO$ có: Chung F và $\frac{FE}{FH} = \frac{FB}{FO}$	
	$\Rightarrow \triangle FEH \sim \triangle FBO$ (c.g.c)	0,75
	$\Rightarrow FEH = FBO$ (3)	0,25
	$\triangle BOH$ cân tại $O \Rightarrow OHB = OBH$ hay $OHB = FBO$ (4)	0,5
	Từ (3) và (4) suy ra $FEH = OHB$.	0,25
3	Gọi M là giao điểm của BH và AC $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn đường kính $BC \Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại $A \Rightarrow BAM = 90^\circ$	0,5
	Cm: $\triangle ABM \sim \triangle HCM \Rightarrow ABM = HCM$ hay $ABH = ECH$	
	Cm: $\triangle ABC \sim \triangle ECF \Rightarrow \frac{AB}{EC} = \frac{BC}{CF}$ (3)	0,25
	Cm: $\triangle BHC \sim \triangle BCF \Rightarrow \frac{BH}{HC} = \frac{BC}{CF}$ (4)	0,25
	Từ (3) và (4) $\Rightarrow \frac{AB}{EC} = \frac{BH}{HC}$	0,25
	Xét $\triangle ABH$ và $\triangle ECH$ có: $ABH = ECH$ và $\frac{AB}{EC} = \frac{BH}{HC}$	
	$\Rightarrow \triangle ABH \sim \triangle ECH$ (c.g.c)	0,25
$\Rightarrow AHB = EHC$	0,25	
	Lại có: $EHC + MHE = BHC = 90^\circ$ nên $AHB + MHE = 90^\circ \Rightarrow AHE = 90^\circ \Rightarrow AH \perp HE$	0,25

Bài 4. (3,0 điểm)

- 1) Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn phương trình: $x^3 - x^2y + 3x - 2y - 5 = 0$.
- 2) Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh: $p^2 - 1$ chia hết cho 24.

ý	Nội dung	Điểm
1	Ta có $x^3 - x^2y + 3x - 2y - 5 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{x^3 + 3x - 5}{x^2 + 2} = x + \frac{x - 5}{x^2 + 2}$	0,25
	Vì $x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow (x - 5) : (x^2 + 2) \Rightarrow (x - 5)(x + 5) : (x^2 + 2)$ $x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow (x - 5) : (x^2 + 2) \Rightarrow (x - 5)(x + 5) : (x^2 + 2)$ $\Rightarrow (x^2 - 25) : (x^2 + 2) \Rightarrow 27 : (x^2 + 2)$	0,5
	Mà $(x^2 + 2) \geq 2$ nên $x^2 + 2 \in \{3; 9; 27\} \Rightarrow x^2 \in \{1; 25\} \Rightarrow x \in \{-1; 1; -5; 5\}$	0,25
	$x = -1 \Rightarrow y = -3$ (thỏa mãn) $x = 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}$ (loại) $x = -5 \Rightarrow y = -\frac{145}{27}$ (loại) $x = 5 \Rightarrow y = 5$ (thỏa mãn) Vậy $(x, y) \in \{(-1; -3); (5; 5)\}$	0,5
2	p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $(p, 3) = 1$ mà $(p - 1)p(p + 1) : 3$ nên $(p - 1)(p + 1) : 3$ (1)	0,5
	p là số nguyên tố lớn hơn 3 $\Rightarrow p$ là số lẻ $\Rightarrow p - 1, p + 1$ là hai số chẵn liên tiếp, có một số là bội của 4 nên $(p - 1)(p + 1) : 8$ (2)	0,5
	Từ (1), (2) và $(3; 8) = 1$ suy ra $(p - 1)(p + 1)$ chia hết cho 24 hay $p^2 - 1$ chia hết cho 24	0,5

Bài 5. (2,0 điểm)

1) Cho x, y, z là các số thực dương có tổng bằng 3. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{1 + y^2} + \frac{y}{1 + z^2} + \frac{z}{1 + x^2} > \frac{2024}{2023}$$

2) Cho một đa giác đều có 2023 đỉnh. Người ta ghi lên mỗi đỉnh của đa giác số 1 hoặc số 2. Biết rằng có tất cả 1013 số 1 và 1010 số 2, các số trên ba đỉnh liên tiếp bất kì không đồng thời bằng nhau. Hãy tính tổng của tất cả các tích ba số trên ba đỉnh liên tiếp của đa giác trên.

ý	Nội dung	Điểm
1	Ta có $\frac{x}{1 + y^2} = \frac{x(1 + y^2) - xy^2}{1 + y^2} = x - \frac{xy^2}{1 + y^2}$	0,25
	Lại có: $1 + y^2 \geq 2y$ nên $\frac{x}{1 + y^2} = x - \frac{xy^2}{1 + y^2} \geq x - \frac{xy^2}{2y} = x - \frac{xy}{2}$ (1)	
	Tương tự: $\frac{y}{1 + z^2} \geq y - \frac{yz}{2}$ (2) $\frac{z}{1 + x^2} \geq z - \frac{zx}{2}$ (3) Cộng từng vế của (1), (2) và (3) ta được $\frac{x}{1 + y^2} + \frac{y}{1 + z^2} + \frac{z}{1 + x^2} \geq (x + y + z) - \frac{1}{2}(xy + yz + zx)$	0,25

	C/m được: $xy + yz + zx \leq \frac{(x+y+z)^2}{3}$ mà $x+y+z=3$	0,25
	Do đó: $\frac{x}{1+y^2} + \frac{y}{1+z^2} + \frac{z}{1+x^2} \geq (x+y+z) - \frac{1}{6}(x+y+z)^2 = 3 - \frac{1}{6} \cdot 3^2 = \frac{3}{2} > \frac{2024}{2023}$	
	Vậy $\frac{x}{1+y^2} + \frac{y}{1+z^2} + \frac{z}{1+x^2} > \frac{2024}{2023}$.	0,25
	Xét tất cả 2023 bộ ba số ghi trên ba đỉnh liên tiếp, chia các bộ số này thành 2 nhóm Nhóm 1: có a bộ, mỗi bộ chứa hai số 1 và một số 2 Nhóm 2: có b bộ, mỗi bộ chứa hai số 2 và một số 1	0,25
	Số các số 1 trong 2023 bộ đó là: $2a + b = 3 \cdot 1013 = 3039$.	
	Số các số 2 trong 2023 bộ đó là: $2b + a = 3 \cdot 1010 = 3030$	0,25
2	Mà $a + b = 2023$ nên $a = 1016; b = 1007$	0,25
	Mỗi bộ hai số 1 và một số 2 có tích là 2 Mỗi bộ hai số 2 và một số 1 có tích là 4 Vậy tổng của tất cả các tích ba số trên ba đỉnh liên tiếp của đa giác trên là $S = 1016 \cdot 2 + 1007 \cdot 4 = 6060$	0,25