PHÒNG GIÁO DỤC – ĐÀO TẠO
HUYỆN NAM TRỰC

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG HSG CẤP HUYỆN
NĂM HỌC 2022-2023
Môn: Toán 9
Thời gian làm bài: 150 phút
(Đề thi gồm 01 trang)

Bài 1. (4,0 điểm)

1) Rút gọn biểu thức: $A=\dfrac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}}+\dfrac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}$.

2) Cho biểu thức: $P=\left(\dfrac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}\right):\dfrac{\sqrt{x}-1}{2}$, với $x\ge 0;\ x\ne 1$. Hãy so sánh P^2 và $2P$.

Bài 2. (4,0 điểm)

1) Cho $-1\le x;\ y\le 1$ và thỏa mãn: $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=1$. Chứng minh $x^2+y^2=1$.

2) Giải phương trình: $2(x+1)\sqrt{x+1}=\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\right)\left(2-\sqrt{1-x^2}\right)$.

Bài 3. (6,0 điểm)

Cho đường tròn (O) và đường thẳng d (không đi qua tâm O) cắt đường tròn (O) tại hai điểm B và C. Kẻ đường kính CD của đường tròn (O). Tiếp tuyến tại D của đường tròn (O) cắt đường thẳng d tại A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADO cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là E và cắt BC tại điểm I.

1) Chứng minh: AE là tiếp tuyến của đường tròn (O) và I là trung điểm của BC.

2) Gọi T là giao điểm của DE và BC. Chứng minh: $\dfrac{2}{AT}=\dfrac{1}{AB}+\dfrac{1}{AC}$.

3) Chứng minh rằng: DE, OI và tiếp tuyến tại C của đường tròn (O) đồng quy.

Bài 4. (3,0 điểm)

1) Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn phương trình: $2x^2+4x+3y^2=19$.

2) Cho m, n là các số tự nhiên thỏa mãn $m^2-2023n^2+2022$ chia hết cho mn. Chứng minh rằng: m, n là hai số lẻ và nguyên tố cùng nhau.

Bài 5. (3,0 điểm)

1) Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn đồng thời các điều kiện: $x\ge 0;\ y\ge \dfrac{3}{2};\ z\ge 5$ và $x^2+\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{z^2}{9}\le 12$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=\sqrt{2xy-3x}+\sqrt{xz+8z}+2\sqrt{z-5}$.

2) Trên bảng ghi bốn số: 2, 3, 5 và 6. Ta thực hiện một trò chơi như sau: Mỗi lần xóa đi hai số bất kì, chẳng hạn a, b và thay thế bằng hai số $a+b+\sqrt{a^2+b^2}$ và $a+b-\sqrt{a^2+b^2}$, đồng thời giữ nguyên hai số còn lại. Hỏi sau một số lần thay đổi có khi nào ta thu được bốn số mới trên bảng đều nhỏ hơn 1 hay không? Vì sao?

---------Hết---------

(Học sinh được sử dụng máy tính cầm tay không có thẻ nhớ)

Họ và tên thí sinh: .... *Số báo danh:*..

Giám thị 1:.. *Giám thị 2:*..

HƯỚNG DẪN CHẤM

I. Những điều cần lưu ý:

- Các cách giải khác đúng cho điểm tương đương.
- Điểm của từng ý không chia nhỏ hơn 0,25 điểm.
- Điểm toàn bài giữ nguyên không làm tròn.

II. Nội dung

Bài 1. (4,0 điểm)

1) Rút gọn biểu thức: $A=\dfrac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}}+\dfrac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}}$.

2) Cho biểu thức: $P=\left(\dfrac{x+2}{x\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}\right):\dfrac{\sqrt{x}-1}{2}$, với $x\ge 0;\ x\ne 1$. Hãy so sánh P^2 và $2P$.

Câu	Nội dung	Điểm
1.1	$\dfrac{A}{\sqrt{2}}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2+\sqrt{6+2\sqrt{5}}}+\dfrac{3+\sqrt{5}}{2-\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$	0,25
	$=\dfrac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}+\dfrac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$	0,5
	$=\dfrac{\left(3-\sqrt{5}\right)^2+\left(3+\sqrt{5}\right)^2}{9-5}$ $=7$	0,5
	$\Rightarrow A=7\sqrt{2}.$	0,25
1.2	Với $x\ge 0;\ x\ne 1$, ta có: $P=\left(\dfrac{x+2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}+\dfrac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\right).\dfrac{2}{\sqrt{x}-1}$	0,5
	$=\dfrac{x+2+\left(\sqrt{x}-1\right)\sqrt{x}-\left(x+\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}.\dfrac{2}{\sqrt{x}-1}$ $=\dfrac{x+2+x-\sqrt{x}-x-\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}.\dfrac{2}{\sqrt{x}-1}$	0,25
	$=\dfrac{x-2\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}.\dfrac{2}{\sqrt{x}-1}$	0,25
	$=\dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}+1\right)}.\dfrac{2}{\sqrt{x}-1}$	0,25
	$=\dfrac{2}{x+\sqrt{x}+1}.$	0,25
	Chứng minh được $0<P\le 2$.	0,5
	$\Rightarrow P\left(P-2\right)\le 0\Rightarrow P^2\le 2P.$	0,25

	Dấu "=" xảy ra khi $x=0$. KL: Vậy $P^2 \le 2P$.	0,25

Bài 2. (4,0 điểm)

1) Cho $-1 \le x;\ y \le 1$ và thỏa mãn: $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=1$. Chứng minh $x^2+y^2=1$.

2) Giải phương trình: $2(x+1)\sqrt{x+1}=\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\right)\left(2-\sqrt{1-x^2}\right)$.

Câu	Nội dung	Điểm
2.1	Ta có: $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=1 \Leftrightarrow 2-2x\sqrt{1-y^2}-2y\sqrt{1-x^2}=0$	0,5
	$\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{1-y^2}\right)^2+\left(y-\sqrt{1-x^2}\right)^2=0$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x-\sqrt{1-y^2}=0 \\ y-\sqrt{1-x^2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{1-y^2} \\ y=\sqrt{1-x^2} \end{cases}$	0,5
	$\Rightarrow \begin{cases} x^2=1-y^2 \\ y^2=1-x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=1$ (đpcm).	0,5
	Ghi chú: Có thể sử dụng BĐT dạng $ab \le \dfrac{a^2+b^2}{2}$ để đánh giá $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2} \le \dfrac{x^2+1-y^2}{2}+\dfrac{y^2+1-x^2}{2}=1$ Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x=\sqrt{1-y^2} \\ y=\sqrt{1-x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=1-y^2 \\ y^2=1-x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=1$.	
2.2	Điều kiện: $-1 \le x \le 1$.	0,25
	Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{x+1} \\ b=\sqrt{1-x} \end{cases}$ $(a,b\ge 0) \Rightarrow a^2+b^2=2$, khi đó phương trình trở thành:	0,5
	$2a^3=(a+b)\left(a^2+b^2-ab\right)$ $\Leftrightarrow 2a^3=a^3+b^3$ $\Leftrightarrow a^3=b^3$ $\Leftrightarrow a=b$	0,5
	Suy ra: $\sqrt{x+1}=\sqrt{1-x} \Leftrightarrow x=0$ (thỏa mãn).	0,5
	KL: Phương trình có tập nghiệm là $S=\{0\}$.	0,25

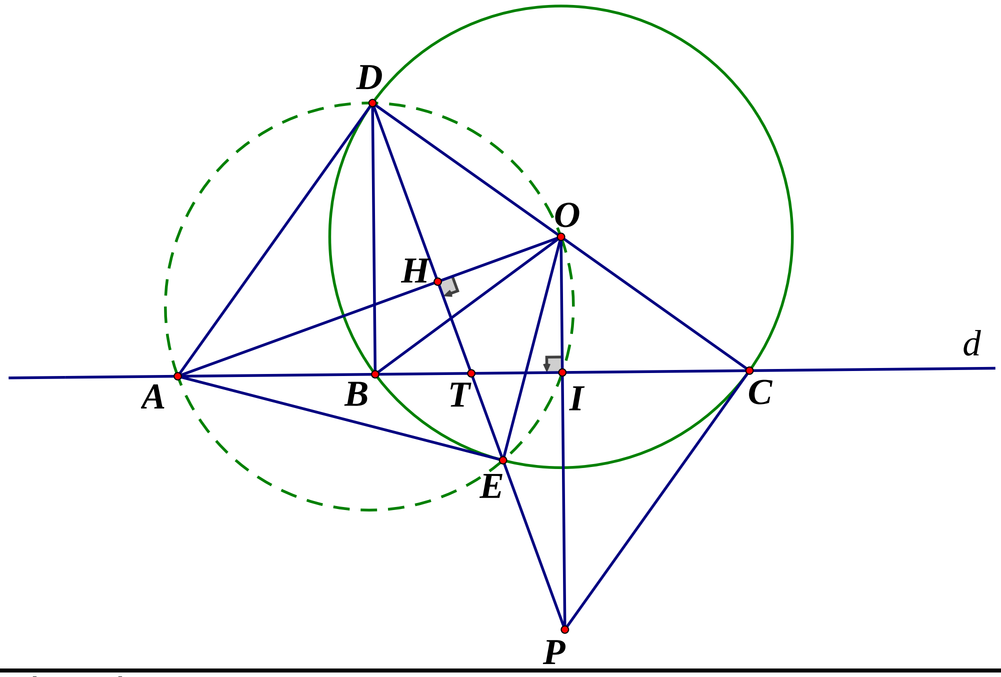
Bài 3. (6,0 điểm)

Cho đường tròn (O) và đường thẳng d (không đi qua tâm O) cắt đường tròn (O) tại hai điểm B và C. Kẻ đường kính CD của đường tròn (O). Tiếp tuyến tại D của đường tròn (O) cắt đường thẳng d tại A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADO cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là E và cắt BC tại điểm I.

1) Chứng minh: AE là tiếp tuyến của đường tròn (O) và I là trung điểm của BC.

2) Gọi T là giao điểm của DE và BC. Chứng minh: $\dfrac{2}{AT}=\dfrac{1}{AB}+\dfrac{1}{AC}$.

3) Chứng minh rằng: DE, OI và tiếp tuyến tại C của đường tròn (O) đồng quy.

Câu	Nội dung	Điểm
	 	
3.1	AD là tiếp tuyến của (O) tại $D \Rightarrow AD \perp OD \Rightarrow \Delta ADO$ vuông tại D $\Rightarrow \Delta ADO$ nội tiếp trong đường tròn đường kính AO.	0,5
	$E \in$ đường tròn đường kính $AO \Rightarrow \Delta AEO$ vuông tại $E \Rightarrow AE \perp OE$. Xét (O) có: $AE \perp OE$ tại E và OE là bán kính của (O) $\Rightarrow AE$ là tiếp tuyến của (O) tại E.	1,0
	$I \in$ đường tròn đường kính $AO \Rightarrow \Delta AIO$ vuông tại $I \Rightarrow OI \perp AI \Rightarrow OI \perp BC$. Xét (O) có: $OI \perp$ dây BC tại $I \Rightarrow I$ là trung điểm của BC.	0,5
3.2	Gọi H là giao điểm của AO và DE. Cm được: $AO \perp DE$ tại H.	0,25
	C/m được: $AD^2 = AH.AO$ (1)	0,25
	C/m được: $AD^2 = AB.AC$ (2)	0,25
	C/m được: $AH.AO = AT.AI$ (3)	0,25
	Từ (1), (2) và (3) suy ra: $AT.AI = AB.AC$	0,25
	$\Rightarrow \dfrac{1}{AT} = \dfrac{AI}{AB.AC} \Rightarrow \dfrac{2}{AT} = \dfrac{2AI}{AB.AC}$	0,25
	$= \dfrac{AI + AI}{AB.AC} = \dfrac{AB + IB + AC - IC}{AB.AC}$	0,25
	$= \dfrac{AB + AC}{AB.AC}$ (do $IB = IC$) $= \dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{AC}$ (đpcm)	0,25
3.3	Gọi P là giao điểm của DE và OI. C/m được $\Delta OHP \sim \Delta OIA \Rightarrow OH.OA = OI.OP$ (4)	0,5
	C/m được: $OH.OA = OD^2 = OC^2$ (5)	0,25
	Từ (4) và (5) suy ra $OC^2 = OI.OP \Rightarrow \dfrac{OI}{OC} = \dfrac{OC}{OP}$	0,25

	Xét ΔOIC và ΔOCP có: chung góc O, $\dfrac{OI}{OC}=\dfrac{OC}{OP}$ Do đó ΔOIC và ΔOCP đồng dạng	**0,5**
	$\Rightarrow OCP = OIC = 90^o \Rightarrow CP\perp OC$	**0,25**
	Xét (O) có: $CP\perp OC$ tại C, $C\in(O)\Rightarrow$ PC là tiếp tuyến của (O) tại C. Vậy DE, OI và tiếp tuyến tại C của đường tròn (O) đồng quy tại một điểm.	**0,25**

Bài 4. (3,0 điểm)

1) Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn phương trình: $2x^2+4x+3y^2=19.$

2) Cho m, n là các số tự nhiên thỏa mãn $m^2-2023n^2+2022$ chia hết cho $mn.$ Chứng minh rằng: m, n là hai số lẻ và nguyên tố cùng nhau.

Câu	Nội dung	Điểm
4.1	Giả sử tồn tại $(x;y)$ nguyên thỏa mãn phương trình $2x^2+4x+3y^2=19.$ Ta có: $2x^2+4x+3y^2=19 \Leftrightarrow 2(x+1)^2=3(7-y^2)$ (*)	**0,25**
	Từ (*) suy ra $7-y^2\ge 0\Rightarrow y^2\le 7$. (1)	**0,25**
	Từ (*) suy ra: $3(7-y^2)\,\vdots\,2$ mà $(3,2)=1$ nên $7-y^2\,\vdots\,2\Rightarrow y$ lẻ (2)	**0,25**
	Từ (1) và (2) ta được $y^2=1$.	**0,25**
	$\Rightarrow 2(x+1)^2=3.(7-1)\Rightarrow(x+1)^2=9\Rightarrow x\in\{2;-4\}$.	**0,25**
	Thử lại ta thấy $(2;1), (2;-1), (-4;1), (-4;-1)$ là những cặp số nguyên thỏa mãn.	**0,25**
4.2	Nếu m, n là hai số chẵn thì $m^2-2023n^2+2022$ không chia hết cho 4 và mn chia hết cho 4 suy ra $m^2-2023n^2+2022$ không chia hết cho mn (loại).	**0,5**
	Nếu m, n khác tính chẵn lẻ thì $m^2-2023n^2+2022$ lẻ và mn chẵn, do đó $m^2-2023n^2+2022$ không chia hết cho mn (loại). Vậy m,n là những số lẻ.	**0,5**
	Gọi $(m,n)=d\Rightarrow\begin{cases}m^2-2023n^2\,\vdots\,d^2\\ mn\,\vdots\,d^2\end{cases}$ mà $m^2-2023n^2+2022\,\vdots\,mn$ nên $2022\,\vdots\,d^2$. Mặt khác $2022=2.3.337$ tức 2022 không có ước chính phương nào ngoài 1, do đó $d^2=1\Rightarrow d=1\Rightarrow(m,n)=1$. Vậy m,n là hai số nguyên tố cùng nhau.	**0,5**

Bài 5. (3,0 điểm)

1) Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn đồng thời các điều kiện: $x\ge 0; y\ge\dfrac{3}{2}; z\ge 5$ và $x^2+\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{z^2}{9}\le 12.$ Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=\sqrt{2xy-3x}+\sqrt{xz+8z}+2\sqrt{z-5}.$

2) Trên bảng ghi bốn số: $2, 3, 5$ và $6.$ Trên bảng ghi bốn số $2, 3, 5, 6.$ Ta thực hiện một trò chơi như sau: Mỗi lần xóa đi hai số bất kì, chẳng hạn a, b và thay thế bằng hai số $a+b+\sqrt{a^2+b^2}$ và $a+b-\sqrt{a^2+b^2}$, đồng thời giữ nguyên hai số còn lại. Hỏi sau một số lần thay đổi có khi nào ta thu được bốn số mới trên bảng đều nhỏ hơn 1 hay không? Vì sao?

Câu	Nội dung	Điểm
5.1	Áp dụng bất đẳng thức AM-GM: $\sqrt{2xy-3x}=\sqrt{x(2y-3)}\le\frac{x+2y-3}{2}$	**0,25**
	$\sqrt{xz+8z}=\sqrt{z(x+8)}\le\frac{z+x+8}{2}$	**0,25**
	$2\sqrt{z-5}=\sqrt{4(z-5)}\le\frac{4+z-5}{2}$	**0,25**
	Cộng từng vế của 3 BĐT trên ta được: $T\le x+y+z+2$ (1)	**0,25**
	Áp dụng BĐT Bunhiacopski: $(x+y+z)^2=\left(1.x+\sqrt{2}\frac{y}{\sqrt{2}}+3.\frac{z}{3}\right)^2\le(1+2+9)\left(x^2+\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{9}\right)=12.12=144$ $\Rightarrow x+y+z\le 12$ (2)	**0,5**
	Từ (1) và (2) suy ra $T\le 14$.	**0,25**
	Dấu "=" xảy ra khi $x=1;y=2;z=9$. Vậy T có GTLN bằng 14 khi $x=1;y=2;z=9$.	**0,25**
	Ghi chú: Có thể đánh giá $x+y+z$ bởi các đánh giá: $x\le\frac{x^2+1}{2};\ y\le\frac{y^2+4}{4};\ z\le\frac{z^2+81}{18}$	
5.2	Nếu bốn số được ghi trên bảng là *a; b; c; d* thì tổng các nghịch đảo của chúng là $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$ Khi xóa đi hai số chẳng hạn a,b và thay thế bằng hai số $a+b+\sqrt{a^2+b^2}$ và $a+b-\sqrt{a^2+b^2}$, đồng thời giữ nguyên hai số còn lại, khi đó bốn số trên bảng là: $a+b+\sqrt{a^2+b^2};a+b-\sqrt{a^2+b^2};c;d$ Ta có: $\frac{1}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{1}{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{a+b-\sqrt{a^2+b^2}+a+b+\sqrt{a^2+b^2}}{(a+b)^2-(a^2+b^2)}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$	**0,5**
	Khi đó: $\frac{1}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{1}{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$ Như vậy sau mỗi lần thay đổi thì tổng nghịch đảo của bốn số đã cho không đổi.	**0,25**
	Mặt khác với bốn số $2, 3, 5, 6$ trên bảng thì $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}<4$ Giả sử sau một số lần thay đổi ta thu được bốn số x; y; z; t đều bé hơn 1. Khi đó ta có $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{t}>4$. Điều này dẫn mâu thuẫn. Do đó sau một quá trình thay đổi ta không thể thu được bốn số đều bé hơn 1.	**0,25**

	Ghi chú: Ta cũng có thể giải bài toán trên theo cách khác như sau: Khi xóa đi hai số chẳng hạn a,b và thay thế bằng hai số $a+b+\sqrt{a^2+b^2}$ và $a+b-\sqrt{a^2+b^2}$, đồng thời giữ nguyên hai số còn lại, khi đó bốn số trên bảng là: $a+b+\sqrt{a^2+b^2};a+b-\sqrt{a^2+b^2};c;d$ Khi đó ta được $a+b+\sqrt{a^2+b^2}+a+b-\sqrt{a^2+b^2}+c+d>a+b+c+d$. Như vậy sau mỗi lần thay đổi ta thu được bốn số có tổng lớn hơn bốn số cũ. Do đó $a+b+\sqrt{a^2+b^2}+a+b-\sqrt{a^2+b^2}+c+d>2+3+5+6=16.$ Vì vậy không thể tồn tại bốn số mới đều nhỏ hơn 1.	