

Câu 1. (3,0 điểm) Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} (x^2 + y)\sqrt{y-2x-4} = 2x^2 + 2x + y \\ x^3 - x^2 - y + 6 = 4\sqrt{x+1} + 2\sqrt{y-1} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Câu 2. (3,0 điểm)

Cho dãy số (u_n) thỏa mãn:
$$\begin{cases} 1 \leq u_1 \leq 3 \\ u_{n+1} = 4 - \frac{2(u_n + 1)}{2^{u_n}}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Chứng minh $1 \leq u_n \leq 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$ và tìm giới hạn (nếu có) của dãy số (u_n) .

Câu 3. (3,0 điểm) Cho đa thức $P(x)$ với hệ số thực, thỏa mãn:

$$P(x).P(x+1) = P(x^2 + x + 1), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Chứng minh $P(x)$ không phải là đa thức bậc lẻ và tìm $P(x)$.

Câu 4. (3,0 điểm)

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^4 + (y+2)^3 = (x+2)^4$.

b) Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố có dạng $p = 4k + 3$ ($k \in \mathbb{N}$) thì không tồn tại $p-1$ số tự nhiên liên tiếp sao cho có thể phân chia tập hợp các số đó thành hai tập hợp con rời nhau để tích tất cả các số thuộc tập hợp này bằng tích tất cả các số thuộc tập hợp kia.

Câu 5. (5,0 điểm)

a) Cho tam giác nhọn ABC ($AB > AC$). Đường tròn (O) đường kính BC cắt AB, AC lần lượt tại F, E . Gọi H là giao điểm của BE và CF , đường thẳng AH cắt đường thẳng BC tại D , đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại K . Đường thẳng qua D song song với EF cắt hai đường thẳng AB, AC lần lượt tại M, N . Chứng minh bốn điểm M, O, N, K cùng nằm trên một đường tròn.

b) Cho tam giác ABC cân tại B , $\widehat{BAC} = \widehat{BCA} = 30^\circ$. Ba điểm D, E, F lần lượt thay đổi trên ba cạnh AB, BC, AC sao cho $\widehat{BFD} = \widehat{BFE} = 60^\circ$. Gọi p, p_1 lần lượt là chu vi của $\Delta ABC, \Delta DEF$. Chứng minh $p \leq 2p_1$.

Câu 6. (3,0 điểm)

Tô màu tất cả các đỉnh của một đa giác lồi 10 đỉnh bằng hai màu xanh và đỏ (mỗi đỉnh một màu). Hỏi có bao nhiêu cách tô màu sao cho không có hai đỉnh liền kề nào của đa giác đó cùng màu đỏ?

----- HẾT -----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu; Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay.

Họ và tên thí sinh:.....; Số báo danh.....

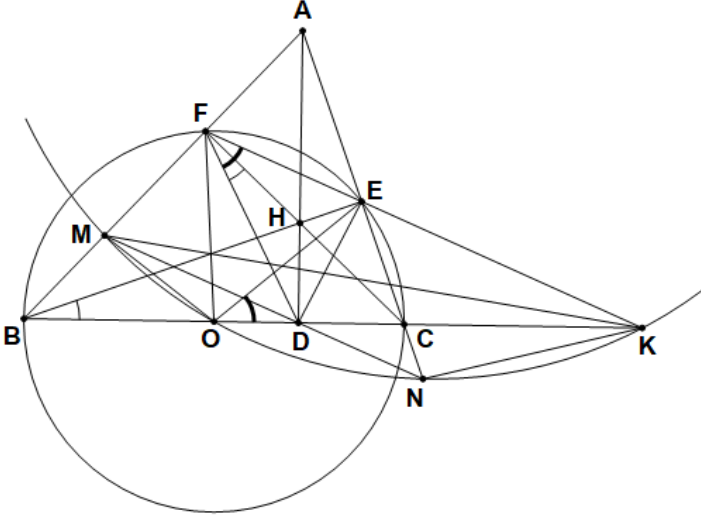
(Bản hướng dẫn này gồm 07 trang)

TT	Nội dung	Điểm
Câu 1 (3,0)	Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} (x^2 + y)\sqrt{y-2x} - 4 = 2x^2 + 2x + y \\ x^3 - x^2 - y + 6 = 4\sqrt{x+1} + 2\sqrt{y-1} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$	3,0
	Điều kiện: $x \geq -1; y \geq 1; y - 2x \geq 0.$	0,25
	$(x^2 + y)\sqrt{y-2x} - 4 = 2x^2 + 2x + y \Leftrightarrow (x^2 + y)(\sqrt{y-2x} - 2) + y - 2x - 4 = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow (y - 2x - 4)\left(\frac{x^2 + y}{\sqrt{y-2x} + 2} + 1\right) = 0 \Leftrightarrow y = 2x + 4.$	0,25
	Thay $y = 2x + 4$ vào phương trình còn lại ta được: $x^3 - x^2 - 2x + 2 - 4\sqrt{x+1} - 2\sqrt{2x+3} = 0$ (*).	0,25
	- Với $x = -1$ thỏa phương trình (*). Suy ra $(x; y) = (-1; 2)$ là một nghiệm của hệ phương trình.	0,25
	- Với $x > -1$, ta có: $x^3 - x^2 - 2x + 2 - 4\sqrt{x+1} - 2\sqrt{2x+3} = 0$ $\Leftrightarrow x^3 - x^2 - 5x - 3 - 2[2\sqrt{x+1} - (x+1)] - [2\sqrt{2x+3} - (x+3)] = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 2x - 3) + \frac{2(x^2 - 2x - 3)}{2\sqrt{x+1} + (x+1)} + \frac{x^2 - 2x - 3}{2\sqrt{2x+3} + (x+3)} = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow (x^2 - 2x - 3)\left[(x+1) + \frac{2}{2\sqrt{x+1} + (x+1)} + \frac{1}{2\sqrt{2x+3} + (x+3)}\right] = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ (vì $x > -1$). Suy ra $(x; y) = (3; 10)$ là một nghiệm của hệ phương trình.	0,25
	Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm: $(x; y) = (-1; 2), (x; y) = (3; 10).$	0,25

TT	Nội dung	Điểm
	<p>Câu 2. (3,0 điểm) Cho dãy số (u_n) thỏa mãn : $\begin{cases} 1 \leq u_1 \leq 3 \\ u_{n+1} = 4 - \frac{2(u_n + 1)}{2^{u_n}}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$</p> <p>Chứng minh $1 \leq u_n \leq 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$ và tìm giới hạn (nếu có) của dãy số (u_n).</p>	3,0
	<p>- Xét $f(x) = 4 - \frac{2(x+1)}{2^x}, 1 \leq x \leq 3$.</p> $f'(x) = 2 \left[\frac{(x+1)\ln 2 - 1}{2^x} \right] > 0 \Rightarrow f(x) \text{ đồng biến trên đoạn } [1;3].$	0,5
	<p>Chứng minh bằng phương pháp quy nạp được $1 \leq u_n \leq 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$.</p>	0,5
	<p>- Xét $g(x) = f(x) - x = 4 - \frac{2(x+1)}{2^x} - x, g'(x) = \frac{2(x+1)\ln 2 - 2 - 2^x}{2^x}$.</p>	0,25
	<p>+ Xét $h(x) = 2(x+1)\ln 2 - 2 - 2^x, h'(x) = (2 - 2^x)\ln 2 \leq 0, \forall x \in [1;3]$ $\Rightarrow h(x) \leq h(1) = 4\ln 2 - 4 < 0 \Rightarrow g'(x) < 0$. Suy ra $g(x) \geq g(3) = 0$ hay $f(x) \geq x, \forall x \in [1;3]$.</p>	0,5
	<p>Chứng minh bằng phương pháp quy nạp được dãy số (u_n) tăng.</p>	0,25
	<p>Dãy số (u_n) tăng và bị chặn trên ($u_n \leq 3$) nên dãy số (u_n) có giới hạn và giới hạn đó là nghiệm của phương trình $f(x) - x = 0$ hay $g(x) = 0$.</p>	0,5
	<p>Lại có, $g(x)$ nghịch biến trên đoạn $[1;3]$ và $g(3) = 0$ nên $x = 3$ là nghiệm duy nhất của $g(x) = 0$. Vậy $\lim u_n = 3$.</p>	0,5

TT	Nội dung	Điểm
	<p>Câu 3. (3,0 điểm) Cho đa thức $P(x)$ với hệ số thực, thỏa mãn:</p> $P(x).P(x+1) = P(x^2 + x + 1) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$ <p>Chứng minh $P(x)$ không phải là đa thức bậc lẻ và tìm $P(x)$.</p>	3,0
	<p>+ Xét $P(x) = C$ (C là hằng số), từ đẳng thức đã cho suy ra $C = 0$ hoặc $C = 1$.</p>	0,25
	<p>+ Xét $P(x)$ có bậc lớn hơn 0: Nếu x_0 là một nghiệm của $P(x)$ thì $x_1 = x_0^2 + x_0 + 1$ cũng là một nghiệm của $P(x)$. Bằng quy nạp, nếu x_n là một nghiệm của $P(x)$ thì $x_{n+1} = x_n^2 + x_n + 1$ cũng là một nghiệm của $P(x)$. Vì $x_{n+1} - x_n = x_n^2 + 1 > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ nên phương trình $P(x) = 0$ có vô số nghiệm, điều này vô lý. Vậy phương trình $P(x) = 0$ vô nghiệm. Suy ra $P(x)$ là đa thức bậc chẵn.</p>	0,75
	<p>Gọi a là hệ số của lũy thừa của x có số mũ cao nhất trong $P(x)$ ($a \neq 0$), từ đẳng thức đã cho suy ra $a = 1$.</p>	0,25
	<p>+ Xét $P(x) = x^2 + bx + c$, thế vào đẳng thức đã cho và biến đổi ta được:</p> $x^4 + (2b+2)x^3 + (b^2 + 3b + 2c + 1)x^2 + (b^2 + 2bc + b + 2c)x + c(b+c+1)$ $= x^4 + 2x^3 + (3+b)x^2 + (2+b)x + b+c+1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$ <p>Đồng nhất hệ số ta được $b = 0, c = 1$. Do đó $P(x) = x^2 + 1$ thỏa mãn.</p>	0,5
	<p>+ Xét $P(x) = (x^2 + 1)^n, n \in \mathbb{N}^*$, ta có:</p> $P(x).P(x+1) = (x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2)^n,$ $P(x^2 + x + 1) = (x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2)^n$ <p>Do đó $P(x) = (x^2 + 1)^n$ thỏa mãn.</p>	0,5
	<p>+ Xét $P(x) = (x^2 + 1)^n + Q(x)$, với $Q(x)$ là đa thức bậc m ($m < 2n$) và $Q(x) \neq 0$, từ đẳng thức đã cho ta có:</p> $\left[(x^2 + 1)^n + Q(x) \right] \left[((x+1)^2 + 1)^n + Q(x+1) \right] = \left[(x^2 + x + 1)^2 + 1 \right]^n + Q(x^2 + x + 1)$ $\Leftrightarrow (x^2 + 1)^n Q(x+1) + ((x+1)^2 + 1)^n Q(x) = Q(x^2 + x + 1) - Q(x)Q(x+1) \quad (*)$ <p>Vế trái của (*) là đa thức bậc $2n + m$, vế phải của (*) là đa thức bậc bé hơn hoặc bằng $2m$, điều này vô lý (vì $m < 2n$). Do đó $Q(x) \equiv 0$ và $P(x) = (x^2 + 1)^n$.</p>	0,5
	<p>Vậy, tất cả các đa thức cần tìm là: $P(x) = 0; P(x) = 1; P(x) = (x^2 + 1)^n$, với n là số tự nhiên.</p>	0,25

TT	Nội dung	Điểm
	Câu 4. (3,0 điểm)	
	a) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $x^4 + (y+2)^3 = (x+2)^4$.	1,5
	Ta có $x^4 + (y+2)^3 = (x+2)^4 \Leftrightarrow (y+2)^3 = 8(x^3 + 3x^2 + 4x + 2)$	0,25
	$\Rightarrow (y+2)^3 : 8 \Rightarrow (y+2) : 2 \Rightarrow y+2 = 2k (k \in \mathbb{Z})$.	0,25
	Khi đó, ta có: $8k^3 = 8(x^3 + 3x^2 + 4x + 2) \Rightarrow k^3 = (x+1)^3 + (x+1)$.	
	- Nếu $x > -1$, ta có $k^3 = (x+1)^3 + (x+1) > (x+1)^3$. Lại có: $(x+2)^3 - k^3 = (x+2)^3 - [(x+1)^3 + (x+1)]$ $= 3(x+1)^2 + 2(x+1) + 1 > 0 \Rightarrow (x+2)^3 > k^3$ $\Rightarrow (x+1)^3 < k^3 < (x+2)^3 \Leftrightarrow x+1 < k < x+2$ (không thỏa). Vậy $x \leq -1$ (1).	0,5
	- Nếu $x \leq -2$: $(x; y)$ thỏa mãn phương trình khi: $x^4 + (y+2)^3 = (x+2)^4 \Leftrightarrow [-(x+2)]^4 + [-(y+4)+2]^3 = [-(x+2)+2]^4$ $\Rightarrow (-(x+2); -(y+4))$ cũng thỏa mãn phương trình.	0,25
	Theo trên, suy ra $-(x+2) \leq -1 \Leftrightarrow x \geq -1$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $(x; y) = (-1; -2)$ (thỏa mãn). Vậy $(x; y) = (-1; -2)$ là cặp số thỏa yêu cầu.	0,25
	b) Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố có dạng $p = 4k + 3 (k \in \mathbb{N})$ thì không tồn tại $p-1$ số tự nhiên liên tiếp sao cho có thể phân chia tập hợp các số đó thành hai tập hợp con rời nhau để tích tất cả các số thuộc tập hợp này bằng tích tất cả các số thuộc tập hợp kia.	1,5
	Giả sử với số nguyên tố $p = 4k + 3$, tồn tại $p-1 = 4k + 2$ số tự nhiên liên tiếp mà ta có thể chia tập hợp các số này thành hai tập hợp con sao cho tích tất cả các số thuộc mỗi tập hợp đều bằng a . Khi đó, ta có: $a^2 = m(m+1)(m+2)\dots(m+p-2)$.	0,25
	Chia các số: $m, (m+1), (m+2), \dots, (m+p-2)$ cho p ta được các số dư đôi một khác nhau. Nếu trong dãy số $m, (m+1), (m+2), \dots, (m+p-2)$ (*) có số chia hết cho p , thì theo giả thiết phản chứng ắt phải có số thứ hai trong dãy (*) chia hết cho p , điều này vô lý (các số dư khi chia các số trong dãy (*) cho p đôi một khác nhau). Do đó, tập hợp các số dư có thể là $\{1; 2; 3; \dots; (p-1)\}$.	0,25
	$\Rightarrow a^2 \equiv (p-1)! \pmod{p} \Rightarrow a^2 + 1 \equiv (p-1)! + 1 \pmod{p}$.	0,25
	Mà $(p-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ (Định lý Wilson) nên $a^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow a^2 \equiv -1 \pmod{p}$	0,25
	$\Rightarrow a^{2\left(\frac{p-1}{2}\right)} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p} \Rightarrow a^{p-1} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p} \Rightarrow a^{p-1} - 1 \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} - 1 \pmod{p}$.	0,25
	Lại có $a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ (Định lý Fermat) nên $(-1)^{\frac{p-1}{2}} - 1 \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow (-1)^{2k+1} - 1 \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow -2 \equiv 0 \pmod{p}$ (Vô lý). Suy ra điều phải chứng minh.	0,25

TT	Nội dung	Điểm
	<p>Câu 5. (5,0 điểm)</p> <p>a) Cho tam giác nhọn ABC ($AB > AC$). Đường tròn (O) đường kính BC cắt AB, AC lần lượt tại F, E. Gọi H là giao điểm của BE và CF, đường thẳng AH cắt đường thẳng BC tại D, đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại K. Đường thẳng qua D song song với EF cắt hai đường thẳng AB, AC lần lượt tại M, N. Chứng minh bốn điểm M, O, N, K cùng nằm trên một đường tròn.</p>	3,0
		0,25
	<p>+ Tứ giác BFHD nội tiếp đường tròn nên $\widehat{DBH} = \widehat{DFH}$. Mà $\widehat{DBH} = \widehat{CFE}$ nên $\widehat{DBH} = \frac{1}{2} \widehat{DFE}$.</p>	0,25
	<p>Hơn nữa $\widehat{DBH} = \frac{1}{2} \widehat{COE}$ nên $\widehat{COE} = \widehat{DFE}$. Suy ra tứ giác OFED nội tiếp đường tròn.</p>	0,5
	<p>Suy ra $\widehat{ODF} = \widehat{OEF} = \widehat{OFE}$. Do đó hai tam giác ODF và OFK đồng dạng, nên</p> $\frac{OD}{OF} = \frac{OF}{OK} \Rightarrow OD \cdot OK = OF^2.$	0,5
	<p>Ta có $\widehat{DNC} = \widehat{AEF} = \widehat{MBD}$ và $\widehat{CDN} = \widehat{MDB}$ Suy ra hai tam giác DNC và DBM đồng dạng</p> $\Rightarrow \frac{DN}{DB} = \frac{DC}{DM} \Rightarrow DM \cdot DN = DB \cdot DC.$	0,5
	<p>Ta có $DM \cdot DN = DB \cdot DC = (OB+OD)(OC-OD) = (OC+OD)(OC-OD) = OC^2 - OD^2 = OF^2 - OD^2$ $= OD \cdot OK - OD^2 = OD(OK - OD) = OD \cdot KD$</p>	0,5
	<p>Suy ra $\frac{DM}{DK} = \frac{DO}{DN}$.</p> <p>Hơn nữa $\widehat{MDO} = \widehat{KDN}$ nên hai tam giác DMO và DKN đồng dạng $\Rightarrow \widehat{DMO} = \widehat{DKN}$. Vậy bốn điểm M, O, N, K cùng nằm trên một đường tròn.</p>	0,5

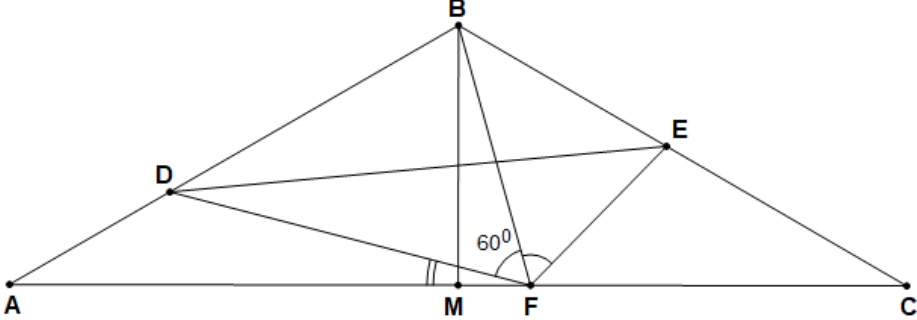
* **Cách khác:** Xét tứ giác toàn phần AEHFCB có $(BCDK) = -1$.

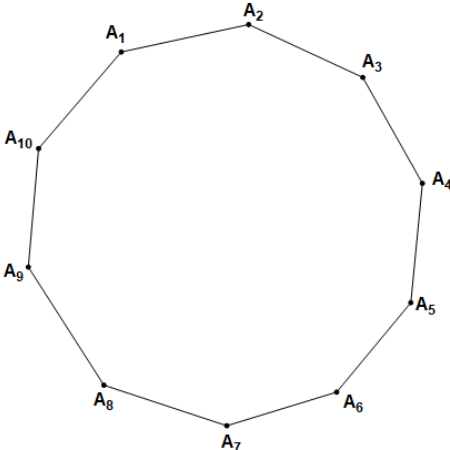
Vì O là trung điểm của BC nên theo hệ thức Macloranh, ta có: $\overline{DO} \cdot \overline{DK} = \overline{DB} \cdot \overline{DC}$ (1).

Mặt khác, ta có: $\widehat{MNC} = \widehat{AFE}$ (đồng vị), $\widehat{AFE} = \widehat{MBC}$ (đồng vị). Suy ra $\widehat{MNC} = \widehat{MBC}$

Do đó, tứ giác MBNC nội tiếp trong đường tròn. Suy ra $\overline{DB} \cdot \overline{DC} = \overline{DM} \cdot \overline{DN}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra. Do đó tứ giác MONK nội tiếp đường tròn.

TT	Nội dung	Điểm
	<p>Câu 5. (5,0 điểm)</p> <p>b) Cho tam giác ABC cân tại B, $\widehat{BAC} = \widehat{BCA} = 30^\circ$. Ba điểm D, E, F lần lượt thay đổi trên ba cạnh AB, BC, AC sao cho $\widehat{BFD} = \widehat{BFE} = 60^\circ$. Gọi p, p_1 lần lượt là chu vi của $\Delta ABC, \Delta DEF$. Chứng minh $p \leq 2p_1$.</p>	2,0
		
	<p>Đặt $\widehat{AFD} = \alpha$, khi đó $\widehat{BDF} = 30^\circ + \alpha$.</p> $60^\circ + \alpha = \widehat{BFA} = \widehat{FBC} + \widehat{FCB} = \widehat{FBC} + 30^\circ \Rightarrow \widehat{FBC} = 30^\circ + \alpha = \widehat{FDB}.$	0,5
	<p>Hơn nữa, $\widehat{BFD} = \widehat{BFE}$ nên hai tam giác BFD và EFB đồng dạng</p> $\Rightarrow \frac{BF}{FE} = \frac{DF}{BF} \Rightarrow BF^2 = DF.FE.$ <p>Lại có: $DF + FE \geq 2\sqrt{DF.FE} \Rightarrow DF + FE \geq 2BF.$</p>	0,75
	$DE = \sqrt{DF^2 + FE^2 + DF.FE} \geq \sqrt{2DF.FE + DF.FE} = \sqrt{3}.BF.$ $p_1 = DF + FE + DE \geq (2 + \sqrt{3})BF \quad (1).$	0,25
	$p = (AB + BC) + AC = 4BM + 2\sqrt{3}BM = 2(2 + \sqrt{3})BM \leq 2(2 + \sqrt{3})BF \quad (2).$ <p style="text-align: center;">(M là trung điểm của AC)</p>	0,25
	<p>Từ (1) và (2) suy ra $p \leq 2p_1$.</p> <p>Dấu bằng xảy ra khi F là trung điểm của BC, khi đó $FD = FE$.</p>	0,25

TT	Nội dung	Điểm
	<p>Câu 6. (3,0 điểm)</p> <p>Tô màu tất cả các đỉnh của một đa giác lồi 10 đỉnh bằng hai màu xanh và đỏ (mỗi đỉnh một màu). Hỏi có bao nhiêu cách tô màu sao cho không có hai đỉnh liền kề nào của đa giác đó cùng màu đỏ?</p>	3,0
		
	<p><i>Nhận xét:</i> Nếu có nhiều hơn 5 đỉnh cùng màu đỏ thì sẽ có hai đỉnh màu đỏ liền kề.</p>	0,25
	<p>- TH1: Có nhiều nhất một đỉnh màu đỏ + Không có đỉnh nào màu đỏ có 1 cách (tất cả màu xanh). + Có đúng một đỉnh màu đỏ có 10 cách. Suy ra TH1 có: $1 + 10 = 11$ cách.</p>	0,25
	<p>- TH2: Có đúng hai đỉnh màu đỏ, nhưng hai đỉnh màu đỏ không liền kề TH này có: $C_{10}^2 - 10 = 35$ cách.</p>	0,25
	<p>- TH3: Có đúng ba đỉnh màu đỏ, nhưng không có hai đỉnh màu đỏ liền kề + 3 đỉnh màu đỏ liền kề có 10 cách. + 3 đỉnh màu đỏ, mà có đúng 2 đỉnh màu đỏ liền kề có: $10 \cdot 6 = 60$ cách. Suy ra TH3 có: $C_{10}^3 - 10 - 60 = 50$ cách.</p>	0,5
	<p>- TH4: Có đúng bốn đỉnh màu đỏ, nhưng không có hai đỉnh màu đỏ liền kề + 4 đỉnh màu đỏ liền kề có 10 cách. + 4 đỉnh màu đỏ, mà có đúng 3 đỉnh màu đỏ liền kề có: $10 \cdot 5 = 50$ cách. + 4 đỉnh màu đỏ, mà có đúng 2 đỉnh màu đỏ liền kề có: $10 \cdot (C_6^2 - 5) = 100$ cách. + 4 đỉnh màu đỏ, mà có 2 cặp đỉnh màu đỏ liền kề, nhưng hai cặp này không liền kề nhau có: $\frac{10 \cdot 5}{2} = 25$ cách. Suy ra TH4 có: $C_{10}^4 - 10 - 50 - 100 - 25 = 25$ cách.</p>	1,25
	<p>- TH5: Có đúng năm đỉnh màu đỏ, nhưng không có hai đỉnh màu đỏ liền kề TH này có 2 cách (5 đỏ xen kẽ 5 xanh). Vậy số cách tô màu thỏa đề là: $11 + 35 + 50 + 25 + 2 = 123$ cách.</p>	0,5

----- HẾT -----

** Lưu ý:* Nếu thí sinh làm bài không theo cách nêu trong HDC nhưng đúng thì vẫn cho đủ số điểm từng phần như hướng dẫn quy định.