SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TỈNH QUẢNG NAM ĐỀ CHÍNH THỨC	KỲ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH THPT ĐỢT 2 NĂM HỌC 2022-2023 Môn thi: TOÁN LỚP 10 (CHUYÊN) Thời gian: 180 phút (*không kể thời gian phát đề*) Ngày thi: 15/3/2023

Câu 1. (*3,0 điểm*)

Giải phương trình sau $\dfrac{x^2}{1+\sqrt{x^2-3x+1}}=x+1$.

Câu 2. (*3,0 điểm*)

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{3-a}{\sqrt{a^2+9-2bc}}+\frac{3-b}{\sqrt{b^2+9-2ac}}+\frac{3-c}{\sqrt{c^2+9-2ab}}>2.$$

Câu 3. (*3,0 điểm*)

Cho k là số thực, tìm tất cả các hàm đơn điệu $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(x+f\left(y\right)\right)=k^2y+f\left(x\right),\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Câu 4. (*3,0 điểm*)

a) Chứng minh rằng số $A=\sqrt{n^4+6n^3+13n^2+12n+4}$ $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$ không phải là số chính phương.

b) Cho đa thức $f\left(x\right)=a_{2023}x^{2023}+a_{2022}x^{2022}+...+a_1x+a_0$ với hệ số nguyên và $a_{2023}\neq 0$ xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng phương trình $f^2\left(x\right)=4$ có số nghiệm nguyên không lớn hơn 2026.

Câu 5. (*5,0 điểm*).

a) Cho ABC là tam giác nhọn, D là điểm bất kỳ trên cạnh BC thỏa $AB>AD$; $AC>AD$. Trên các cạnh AC, AB lần lượt lấy các điểm E, F sao cho $EC=ED$, $FB=FD$. Gọi I, J, K lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, BDF, CDE. Gọi H là trực tâm của tam giác JDK. Chứng minh tứ giác $IJHK$ nội tiếp.

b) Cho tam giác nhọn ABC $(AB<BC)$ có đường cao AK. Gọi điểm D trên cạnh AC thỏa $\dfrac{AD}{DC}=\dfrac{BK}{BC}$, điểm E di động trên đoạn DC. Gọi F là giao điểm của BE và KD, I là giao điểm của FC và KE. Chứng minh rằng điểm I thuộc đường thẳng cố định.

Câu 6. (*3,0 điểm*)

Cho đa giác đều n cạnh $\left(n\in\mathbb{N};n\geq 8\right)$. Gọi x; y lần lượt là số tam giác và số tứ giác lập ra từ các đường chéo của đa giác đều đã cho. Tìm n biết $x=2y$.

---------- HẾT ----------