SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HẢI PHÒNG

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi gồm 08 câu; 02 trang)

KỲ THI
CHỌN HỌC SINH GIỎI THÀNH PHỐ CẤP THPT
NĂM HỌC 2022 - 2023

ĐỀ THI MÔN: TOÁN
Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian giao đề)
Ngày thi: 08/12/2022

Câu 1. *(2,0 điểm)*

a) Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+mx-1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1-x_2|=2.$

b) Cho hàm số $y=x^3+3x^2+(m+4)x+m+2$ có đồ thị là (C_m) và điểm $M\left(2;-\frac{3}{2}\right)$. Tìm các giá trị thực của tham số m để đường thẳng d có phương trình $y=2x+2$ cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt $A(-1;0)$, B, C sao cho ΔMBC là tam giác đều.

Câu 2. *(1,0 điểm)*

Cho hai số thực a, b thỏa mãn $a>b>1$ và $\frac{1}{\log_b a}+\frac{1}{\log_a b}=\sqrt{2022}.$

Tính giá trị của biểu thức $P=\frac{1}{\log_{ab} b}-\frac{1}{\log_{ab} a}.$

Câu 3. *(1,0 điểm)*

Giải phương trình $\frac{2\sqrt{3}\sin^2 x-\sqrt{3}\cos x-2\sin x}{(1-2\cos x)\tan x}=\cos x.$

Câu 4. *(1,0 điểm)*

Tìm các giá trị thực của tham số m để hệ phương trình sau có bốn nghiệm thực phân biệt

$$\begin{cases} x^2+y^2-mx-1=0 \\ x^2-y^2+x+y-2m(x-y+1)=0. \end{cases}$$

Câu 5. *(1,0 điểm)*

Gọi A là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 5 chữ số. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp A. Tính xác suất để chọn được một số chia hết cho 7 và chữ số hàng đơn vị bằng 1.

Câu 6. *(2,0 điểm)*

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $4a$. Biết hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{MD}$. Trên cạnh CD lấy các điểm I, N sao cho $\widehat{ABM}=\widehat{MBI}$ và $MN\perp BI$. Biết góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60°.

a) Tính thể tích của khối chóp $S.AMCB$ theo a.

b) Tính khoảng cách từ điểm N đến mặt phẳng (SBC) theo a.

Câu 7. *(1,0 điểm)*

Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy), cho hình thang $ABCD$ có góc $\widehat{BAD}=\widehat{ADC}=90^o$, $D(2;2)$ và $CD=2AB$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm D trên đường thẳng AC. Điểm $M\left(\frac{22}{5};\frac{14}{5}\right)$ là trung điểm của đoạn HC. Tìm tọa độ các điểm A,B và C, biết rằng đỉnh B thuộc đường thẳng d có phương trình $x-2y+4=0$.

Câu 8. *(1,0 điểm)*

Cho ba số thực dương $x,\ y,\ z$ thỏa mãn $5\left(x^2+y^2+z^2\right)=9\left(xy+2yz+zx\right)$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{x}{y^2+z^2}-\frac{1}{\left(x+y+z\right)^3}$.

--------- Hết ---------

(Thí sinh không sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay. Cán bộ coi thi không cần giải thích gì thêm)

Họ tên thí sinh..Số báo danh...

Cán bộ coi thi số 1..Cán bộ coi thi số 2...

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HẢI PHÒNG

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH
MÔN TOÁN THPT
NĂM HỌC 2022 - 2023
Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu 1: (2,0 điểm)

a) Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{x^3}{3}-2x^2+mx-1$ có hai điểm cực trị $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $|x_1-x_2|=2$.

b) Cho hàm số $y=x^3+3x^2+(m+4)x+m+2$ có đồ thị là (C_m) và điểm $M\left(2;-\frac{3}{2}\right)$. Tìm các giá trị thực của tham số m để đường thẳng d có phương trình $y=2x+2$ cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt $A(-1;0)$, B, C sao cho ΔMBC là tam giác đều.

Lời giải

a) Ta có $f'(x)=x^2-4x+m=0\ (1)$.

Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow 4-m>0 \Leftrightarrow m<4$.

Hàm số có 2 điểm cực trị $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $|x_1-x_2|=2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=4 \\ x_1x_2=m \\ (x_1-x_2)^2=4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=4 \\ x_1x_2=m \\ (x_1+x_2)^2-4x_1x_2=4 \end{cases} \Rightarrow 16-4m=4 \Rightarrow m=3$ (Thỏa mãn).

b) PTHĐGĐ của (C_m) và d : $x^3+3x^2+(m+4)x+m+2=2x+2$

$\Leftrightarrow x^3+3x^2+(m+2)x+m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x^2+2x+m=0\ (*) \end{array}\right.$

d cắt (C_m) tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có 2 nghiệm phân biệt khác $-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-m>0 \\ -1+m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m<1$

Giả sử $B(x_1;2x_1+2)$, $C(x_2;2x_2+2)$, với x_1,x_2 là nghiệm phương trình $(*)$

ΔMBC đều $\Leftrightarrow d(M;d)=\frac{BC\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{\left|4+\frac{3}{2}+2\right|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}.\sqrt{(x_2-x_1)^2}.\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow (x_2-x_1)^2=3 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1x_2=3 \Leftrightarrow 1-4m=3 \Leftrightarrow m=-\frac{1}{2}$ (thỏa mãn).

Câu 2: (1,0 điểm)

Cho hai số thực a, b thỏa mãn $a>b>1$ và $\frac{1}{\log_b a}+\frac{1}{\log_a b}=\sqrt{2022}$.

Tính giá trị biểu thức $P=\frac{1}{\log_{ab} b}-\frac{1}{\log_{ab} a}$.

Ta có $\dfrac{1}{\log_b a}+\dfrac{1}{\log_a b}=\sqrt{2022} \Leftrightarrow \log_a b+\log_b a=\sqrt{2022}$

Ta có $P^2=\left(\dfrac{1}{\log_{ab} b}-\dfrac{1}{\log_{ab} a}\right)^2=\left(\log_b ab-\log_a ab\right)^2=\left(\log_b a-\log_b a\right)^2$

$\Leftrightarrow P^2=\log_b^2 a-2\log_b a\log_b a+\log_a^2 b=\left(\log_b a+\log_b a\right)^2-4=2018 \Rightarrow P=\sqrt{2018}$.

Câu 3: (1,0 điểm)

Giải phương trình $\dfrac{2\sqrt{3}\sin^2 x-\sqrt{3}\cos x-2\sin x}{\left(1-2\cos x\right)\tan x}=\cos x$.

Điều kiện: $\begin{cases} \sin x \neq \dfrac{1}{2} \\ \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$.

Phương trình $\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin^2 x-\sqrt{3}\cos x-2\sin x=\sin x-2\cos x\sin x$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin^2 x+2\cos x\sin x-\sqrt{3}\cos x-3\sin x=0$

$\Leftrightarrow 2\sin x\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)-\sqrt{3}\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(2\sin x-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}\sin x+\cos x\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sin x-\sqrt{3}=0 \\ \sqrt{3}\sin x+\cos x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cot=-\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi & (n) \\ x=\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi & (n),(k\in\mathbb{Z}). \\ x=\dfrac{-\pi}{6}+k\pi & (n) \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm phương trình $S=\left\{k\in\mathbb{Z} \mid \dfrac{\pi}{3}+k2\pi;\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi;\dfrac{-\pi}{6}+k\pi\right\}$.

Câu 4: (1,0 điểm)

Tìm các giá trị thực của tham số m để hệ phương trình sau có bốn nghiệm thực phân biệt $\begin{cases} x^2+y^2-mx-1=0 \\ x^2-y^2+x+y-2m\left(x-y+1\right)=0. \end{cases}\left(*\right)$

Lời giải

+) Hệ $\left(*\right)\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-mx-1=0 \\ (x-y+1)(x+y-2m)=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2-mx-1=0 & (1) \\ x-y+1=0 & (2) \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2-mx-1=0 & (1) \\ x+y-2m=0 & (3) \end{cases} \end{array}\right.$

(1) là phương trình của đường tròn (C) có tâm $I\left(\dfrac{m}{2};0\right)$ và bán kính $R=\dfrac{\sqrt{m^2+4}}{2}$.

(2), (3) lần lượt là phương trình các đường thẳng (Δ_2), (Δ_3).

Do đó, hệ (*) có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi hai đường thẳng (Δ_2), (Δ_3) cắt đường tròn (C) tại bốn điểm đôi một phân biệt.

(Δ_2) cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow \dfrac{\left|\dfrac{m}{2}+1\right|}{\sqrt{2}} < \dfrac{\sqrt{m^2+4}}{2} \Leftrightarrow m^2-4m+4>0 \Leftrightarrow m \neq 2.$

(Δ_3) cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow \dfrac{\left|\dfrac{m}{2}-2m\right|}{\sqrt{2}} < \dfrac{\sqrt{m^2+4}}{2} \Leftrightarrow -\sqrt{\dfrac{8}{7}} < m < \sqrt{\dfrac{8}{7}}$.

Bốn giao điểm đôi một phân biệt khi giao điểm của (Δ_2) và (Δ_3) không thuộc (C)

$$\Leftrightarrow M\left(\frac{2m-1}{2};\frac{2m+1}{2}\right) \notin (C) \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Kết luận: $m \in \left(-\sqrt{\dfrac{8}{7}};\sqrt{\dfrac{8}{7}}\right) \backslash \left\{-1;\dfrac{1}{2}\right\}$.

Câu 5: (1,0 điểm)

Gọi A là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 5 chữ số. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp A. Tính xác suất để chọn được một số chia hết cho 7 và chữ số hàng đơn vị bằng 1 .

Lời giải

Số các số tự nhiên có 5 chữ số là $99999-10000+1=90000$.

Giả sử số tự nhiên có 5 chữ số chia hết cho 7 và chữ số hàng đơn vị bằng 1 là: $\overline{abcd1}$

Ta có $\overline{abcd1}=10.\overline{abcd}+1=3.\overline{abcd}+7.\overline{abcd}+1$ chia hết cho 7 khi và chỉ khi $3.\overline{abcd}+1$ chia hết cho 7. Đặt $3.\overline{abcd}+1=7h \Leftrightarrow \overline{abcd}=2h+\dfrac{h-1}{3}\left(h\in\mathbb{N}^*\right)$ là số nguyên khi và chỉ khi $h=3t+1$

Khi đó ta được: $\overline{abcd}=7t+2 \Rightarrow 1000 \le 7t+2 \le 9999 \left(t\in\mathbb{N}^*\right)$

$\Leftrightarrow \dfrac{998}{7} \le t \le \dfrac{9997}{7} \Leftrightarrow t\in\{143, 144,..., 1428\}$ suy ra số cách chọn ra t sao cho số $\overline{abcd1}$ chia hết cho 7 và chữ số hàng đơn vị bằng 1 là 1286.

Vậy xác suất cần tìm là: $\dfrac{1286}{90000}=\dfrac{643}{45000}$.

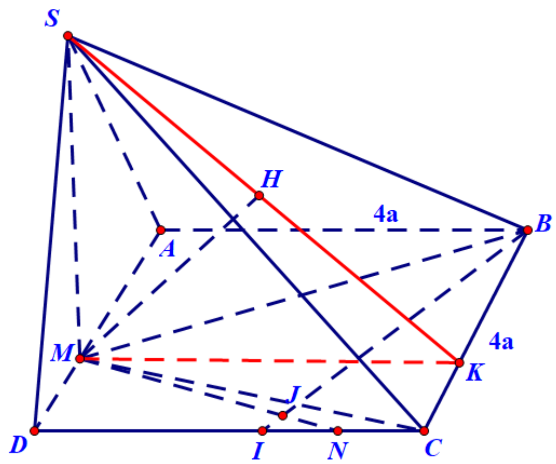
Câu 6: (2,0 điểm)

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $4a$. Biết hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm M thoả mãn $\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{MD}$. Trên cạnh CD lấy các điểm I,N sao cho $\widehat{ABM}=\widehat{MBI}$ và $MN \perp BI$. Biết góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60^0.

a) Tính thể tích khối chóp $S.AMCB$ theo a.

b) Tính khoảng cách từ điểm N đến mặt phẳng (SBC) theo a.

Lời giải



a) Tính thể tích khối chóp $S.AMCB$ theo a.

Ta có $AM = \frac{8a}{3}, MD = \frac{4a}{3}, MC = \sqrt{MD^2 + DM^2} = \frac{4\sqrt{10}a}{3}$.

Góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng góc $\widehat{SCM} = 60^0$.

Xét tam giác vuông $SMC \Rightarrow SM = MC.\tan 60^0 = \frac{4\sqrt{30}a}{3}$.

Diện tích tứ giác $S_{AMCB} = \frac{5}{6}S_{ABCD} = \frac{5}{6}.16a^2 = \frac{40a^2}{3}$.

Thể tích khối chóp $S.AMCB = \frac{1}{3}.\frac{40a^2}{3}.\frac{4\sqrt{30}a}{3} = \frac{160\sqrt{30}a^3}{27}$.

b) Tính khoảng cách từ điểm N đến mặt phẳng (SBC) theo a.

Gọi $J = MN \cap BI$.

Theo giả thiết $\widehat{ABM} = \widehat{MBI}$ và $MN \perp BI$ nên $\Rightarrow \Delta MAB = \Delta MJB \Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{JMB}$.

Xét tam giác vuông $MAB \Rightarrow \tan \widehat{AMB} = \frac{AB}{AM} = \frac{4a}{\frac{8a}{3}} = \frac{3}{2}$

Suy ra $\tan \widehat{NMA} = \frac{2\tan \widehat{AMB}}{1 - \tan^2 \widehat{AMB}} = -\frac{12}{5} \Rightarrow \tan \widehat{NMD} = \frac{12}{5} = \frac{DN}{MD} \Rightarrow DN = MD.\frac{12}{5} = \frac{16a}{5} \Rightarrow NC = \frac{4a}{5}$

Vậy ta có: $\frac{NC}{DC} = \frac{1}{5} \Rightarrow d\left(N,(SBC)\right) = \frac{1}{5}d\left(D,(SBC)\right) = \frac{1}{5}d\left(M,(SBC)\right)$.

Kẻ $MK \perp BC \Rightarrow MK // CD \Rightarrow (SMK) \perp (SBC)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên SK ta có $MH \perp (SBC) \Rightarrow d\left(M,(SBC)\right) = MH$.

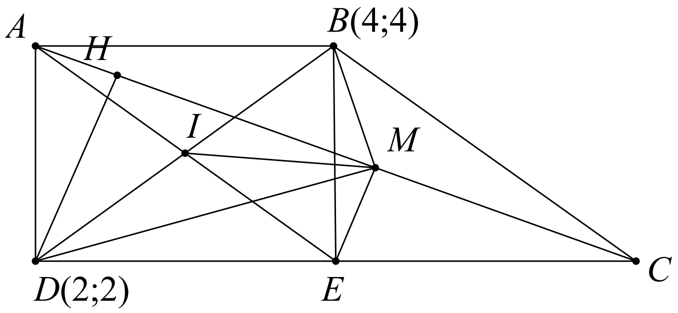
Trong tam giác vuông SMK có $SM = \frac{4\sqrt{30}a}{3}, MK = 4a \Rightarrow MH = \frac{SM.MK}{SK} = \frac{4a\sqrt{30}}{13}$.

Vậy $d\left(N,(SBC)\right) = \frac{1}{5}d\left(M,(SBC)\right) = \frac{1}{5}.\frac{4a\sqrt{30}}{13} = \frac{4a\sqrt{30}}{65}$.

Câu 7: (1,0 điểm)

Trong mặt phẳng Oxy, cho hình thang $ABCD$ có góc $\widehat{BAD} = \widehat{ADC} = 90^0$, $D(2;2)$ và $CD = 2AB$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của D lên đường thẳng AC. Điểm $M\left(\frac{22}{5};\frac{14}{5}\right)$ là trung điểm đoạn HC. Tìm toạ độ các điểm A, B và C, biết rằng đỉnh B thuộc đường thẳng d có phương trình $x-2y+4=0$

Lời giải.



Gọi E là trung điểm DC $\Rightarrow ABDE$ là hình chữ nhật $\Rightarrow ABDE$ là tứ giác nội tiếp (1)

Mà $EM \perp AC$ $\Rightarrow ADEM$ là tứ giác nội tiếp (2)

(1), (2) suy ra A, B, M, E, D cùng thuộc một đường tròn

$\Rightarrow ABDM$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{DAB} = \widehat{DMB} = 90^0 \Rightarrow DM \perp BM$

$\Rightarrow (DM): x-3y+4=0$; $(BM): 3x+y-16=0$

Do $B \in d: x-2y+4=0$. Suy ra toạ độ điểm B là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x-2y+4=0 \\ 3x+y-16-0 \end{cases} \Rightarrow B(4;4)$.

Câu 8: (1,5 điểm)

Cho các số thực dương x, y, z thoả mãn $5(x^2+y^2+z^2) = 9(xy+2yz+zx)$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{x}{y^2+z^2} - \dfrac{1}{(x+y+z)^3}$

Lời giải

Giả thiết suy ra $5x^2 - 9(y+z)x + 5(y+z)^2 = 28zy$

$\Rightarrow 5x^2 - 9(y+z)x + 5(y+z)^2 \le 7(y+z)^2$

$\Leftrightarrow 5x^2 - 9(y+z)x - 2(y+z)^2 \le 0$

$-(y+z) \le x \le 2(y+z)$

Suy ra $0 < x \le 2(y+z)$

Ta có $x+y+z \le 3(y+z) \Rightarrow \dfrac{-1}{(x+y+z)^3} \le \dfrac{-1}{27(y+z)^3}$

Lại có $y^2+z^2 \ge \dfrac{(y+z)^2}{2}$ Từ đó ta được $P \le \dfrac{4(y+z)}{(y+z)^2} - \dfrac{1}{27(y+z)^3} = \dfrac{4}{y+z} - \dfrac{1}{27(y+z)^3}$

Đặt $t = y+z > 0$ khi đó $P \le \dfrac{4}{t} - \dfrac{1}{27t^3}$.

Xét $f(t) = \dfrac{4}{t} - \dfrac{1}{27t^3}, t \in (0;+\infty)$, Ta có $f'(t) = \dfrac{-4}{t^2} + \dfrac{1}{9t^4} \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{6}$.

Bảng biến thiên của $f\left(t\right)$

t	0		$\frac{1}{6}$		$+\infty$
$f'\left(t\right)$		$+$	0	$-$	
$f\left(t\right)$		$\nearrow$	16	$\searrow$	

ta suy ra $f\left(t\right) \le 16.$

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 16 đạt được khi $y = z = \dfrac{1}{12}; x = \dfrac{1}{3}$.