PHÒNG GD & ĐT QUY NHƠN

TRƯỜNG THCS QUANG TRUNG

Chữ kí GT1: ....

Chữ kí GT2: ....

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP TRƯỜNG NĂM HỌC 2023- 2024

Môn: Toán   Lớp: 9

Thời gian làm bài: 150 phút *(Không kể thời gian phát đề)*

Họ và tên: .... **Lớp:** ...... **Số báo danh:** .... **Phòng thi:**.........	**Mã phách**

✂---

Điểm bằng số	**Điểm bằng chữ**	**Chữ ký của GK1**	**Chữ ký của GK2**	**Mã phách**

Đề:

Câu 1: (5 điểm)

1.Cho $Q=\left(\dfrac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}+\dfrac{1-a}{\sqrt{1-a^2}-1+a}\right)\left(\sqrt{\dfrac{1}{a^2}-1}-\dfrac{1}{a}\right)\sqrt{a^2-2a+1}$ (với $0<a<1$).

a) Rút gọn Q.

b) So sánh Q và Q^3.

2. Tính giá trị của biểu thức:

$$P=\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+...+\frac{1}{2025\sqrt{2024}+2024\sqrt{2025}}.$$

Câu 2: (5 điểm)

a) Trên bảng ban đầu ghi số 2 và số 4. Ta thực hiện cách viết thêm các số lên bảng như sau: nếu trên bảng đã có hai số, giả sử là a,b; $a\neq b$, ta viết thêm lên bảng số có giá trị là $a+b+ab.$ Hỏi với cách thực hiện như vậy, trên bảng có thể xuất hiện số 123456 được hay không? Giải thích.

b) Giải phương trình: $x^2-x-4=2\sqrt{x-1}(1-x)$.

Câu 3: (3 điểm) Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn $xy+yz+zx\geq x+y+z.$

Chứng minh rằng: $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^3+8}}+\dfrac{y^2}{\sqrt{y^3+8}}+\dfrac{z^2}{\sqrt{z^3+8}}\geq 1.$

Câu 4: (3 điểm) Cho Δ ABC,biết rằng 3 A +2 B = 180^0 . Chứng minh: $AB^2 = BC^2 + AB.AC$

Câu 5: (4 điểm) Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Hai điểm M, N lần lượt di động trên hai đoạn thẳng $AB,\ AC$ AB, AC sao cho $\dfrac{AM}{MB}+\dfrac{AN}{NC}=1.$ Đặt AM = x, AN = y

Chứng minh: MN = a − x − y .

…./….

<u>BÀI LÀM:</u>

HƯỚNG DẪN CHẤM THI HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP TRƯỜNG
MÔN: TOÁN

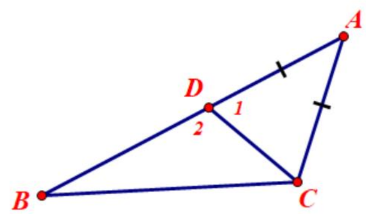
Câu	Đáp án	Điểm
1.1	**a)** Với 0 < a < 1, ta có: $Q=\left(\dfrac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}+\dfrac{1-a}{\sqrt{1-a^2}-1+a}\right).\left(\sqrt{\dfrac{1}{a^2}-1}-\dfrac{1}{a}\right)\sqrt{a^2-2a+1}$ $=\left(\dfrac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}+\dfrac{\sqrt{(1-a)^2}}{\sqrt{(1-a)(1+a)}-\sqrt{(1-a)^2}}\right).\left(\sqrt{\dfrac{1-a^2}{a^2}}-\dfrac{1}{a}\right)\sqrt{(a-1)^2}$ $=\left(\dfrac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}+\dfrac{\sqrt{(1-a)^2}}{\sqrt{(1-a)}\left(\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}\right)}\right).\left(\dfrac{\sqrt{(1-a)(1+a)}}{a}-\dfrac{1}{a}\right)\lvert a-1\rvert$ $=\left(\dfrac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}+\dfrac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}\right).\dfrac{\sqrt{(1-a)(1+a)}-1}{a}(1-a)$ $=\dfrac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}.\dfrac{2\sqrt{(1-a)(1+a)}-(1+a)-(1-a)}{2a}(1-a)$ $=\dfrac{\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}.\dfrac{-\left(\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}\right)^2}{2a}(1-a)$ $=-\dfrac{\left(\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}\right)\left(\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}\right)}{2a}(1-a)$ $=-\dfrac{(1+a)-(1-a)}{2a}(1-a)=-\dfrac{2a}{2a}(1-a)=a-1.$	2,0
	b) Do $1>a>0\Rightarrow 0>a-1>-1\Rightarrow 1>(a-1)^2>0.$ Xét $Q^3-Q=(a-1)\left((a-1)^2-1\right)>0$ .Vậy $Q^3>Q.$	**1.0đ**
1.2	$P=\dfrac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\dfrac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\dfrac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}+...+\dfrac{1}{2025\sqrt{2024}+2024\sqrt{2025}}$ Với $n\in N^*$, ta có: $\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}.\sqrt{n}.\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}$ $=\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}.\sqrt{n}.(n+1-n)}=\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}.\sqrt{n}}=\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ Áp dụng kết quả trên, ta được:	**2.0đ**

	$P=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{2024}}-\frac{1}{\sqrt{2025}}$ $=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2025}}=1-\frac{1}{45}=\frac{44}{45}$	
2.a	Đặt $k=ab+a+b=(a+1)(b+1)-1$. Nếu trong 2 số a,b tồn tại một số chia 3 dư 2 thì k chia 3 dư 2. Ban đầu trên bảng gồm có số 2 và số 4 (một số chia 3 dư 1; một số chia 3 dư 2). Suy ra tại mọi thời điểm, trên bảng luôn chỉ có một số chia 3 dư 1 và các số còn lại chia 3 dư 2. Do đó với cách thực hiện như đề bài, trên bảng không thể xuất hiện số 123456(Vì số 123456 chia hết cho 3).	**2,5đ**
2.b	Điều kiện xác định: $x\ge 1$. Ta có: $x^2-x-4=2\sqrt{x-1}(1-x)\Leftrightarrow x^2+2x\sqrt{x-1}+x-1-2(x+\sqrt{x-1})-3=0$ Đặt $x+\sqrt{x-1}=y$ (điều kiện $y\ge 1$). Phương trình trở thành $y^2-2y-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=-1\\ y=3\end{array}\right.\Leftrightarrow y=3$ (do $y\ge 1$) Khi đó : $x+\sqrt{x-1}=3\Leftrightarrow \sqrt{x-1}=3-x\Leftrightarrow \begin{cases}1\le x\le 3\\ x^2-7x+10=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}1\le x\le 3\\ \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=5\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=2$ Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=2$.	**2,5 đ**
3	Ta có $\sqrt{x^3+8}=\sqrt{(x+2)(x^2-2x+4)}\overset{AM-GM}{\le}\frac{x+2+x^2-2x+4}{2}=\frac{x^2-x+6}{2}$ Tương tự $\sqrt{y^3+8}\le\frac{y^2-y+6}{2}$; $\sqrt{z^3+8}\le\frac{z^2-z+6}{2}$. - Suy ra $\frac{x^2}{\sqrt{x^3+8}}+\frac{y^2}{\sqrt{y^3+8}}+\frac{z^2}{\sqrt{z^3+8}}\ge 2.\left(\frac{x^2}{x^2-x+6}+\frac{y^2}{y^2-y+6}+\frac{z^2}{z^2-z+6}\right)$. (*) - Lại có: $\frac{a^2}{u}+\frac{b^2}{v}+\frac{c^2}{w}\ge\frac{(a+b+c)^2}{u+v+w}\quad \forall a,b,c,u,v,w>0\ (1)$ - Áp dụng (1) và (*) ta thu được $\frac{x^2}{\sqrt{x^3+8}}+\frac{y^2}{\sqrt{y^3+8}}+\frac{z^2}{\sqrt{z^3+8}}\ge\frac{2(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2-(x+y+z)+18}$ (2) Ta cần chứng minh : $\frac{2(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2-(x+y+z)+18}\ge 1$ $\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+4(xy+yz+zx)\ge 18-(x+y+z)$ $\Leftrightarrow (x+y+z)^2+(x+y+z)+2(xy+yz+zx)-18\ge 0$. $\Leftrightarrow (x+y+z)^2+3(x+y+z)-18\ge 0$ (Vì $xy+yz+zx\ge x+y+z$)	**3 đ**

<table>
<tr><td></td><td>

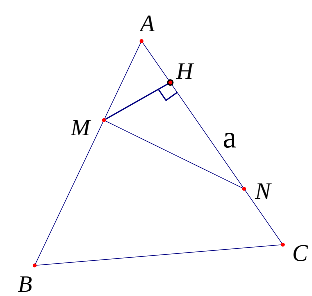
$\Leftrightarrow (x+y+z-3)(x+y+z+6) \geq 0$. (3)
Ta có: $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx) \geq 3(x+y+z)$ nên $x+y+z \geq 3$ => (3) đúng.
Từ (1), (2), (3) suy ra điều phải chứng minh.
Dấu “=” $\Leftrightarrow x=y=z=1$

</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>



Ta có $2B+3A=180^0=A+B+C => C=B+2A>B+A$ => trong Δ ABC có góc C lớn nhất => cạnh AB lớn nhất. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho AD=AC
⇨ AB.AD=AB.AC (1)
Lại có:
$D_2 = 180^0 - D_1 = 180^0 - \frac{180^0 - A}{2} = 180^0 - \frac{2B+3A-A}{2} = 180^0 - \quad A+B \quad = ACB$
⇨ $\Delta BDC \backsim \Delta BCA \Rightarrow \frac{BC}{BD} = \frac{AB}{BC} => AB.BD = BC^2 \quad 2$
Từ (1) và (2) suy ra : BC^2 + AB.AC = AB.BD+AB.AD=AB.(BD+AD)=AB^2

</td><td>3đ</td></tr>
<tr><td>5</td><td>

Ta có:


$\frac{AM}{MB} + \frac{AN}{NC} = 1$
$\Leftrightarrow \frac{AM}{AB-AM} + \frac{AN}{AC-AN} = 1$
$\Leftrightarrow \frac{x}{a-x} + \frac{y}{a-y} = 1$
$\Leftrightarrow x(a-y) + y(a-x) = (a-x)(a-y)$
$\Leftrightarrow a^2 - 2ax - 2ay + 3xy = 0$
$\Leftrightarrow a^2 + x^2 + y^2 - 2ax - 2by + 2xy = x^2 + y^2 - xy$
$\Leftrightarrow (a-x-y)^2 = x^2 + y^2 - xy$ (1)
Kẻ $MH \perp AC$
Ta có $MAH = 60°$ (do ΔABC đều)
ΔAHM vuông tại H: $MH = x.\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}x$
$AH = x.\sin 60° = \frac{x}{2}$
$HN = y - \frac{x}{2}$
Áp dụng ĐL Pitago trong tam giác vuông ΔMNH

</td><td>4đ</td></tr>
</table>

	$MN^2 = MH^2 + HN^2 = \left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{x}{2}\right)^2 = x^2 + y^2 - xy \qquad (2)$ Từ (1) và (2), suy ra: $MN^2 = (\mathrm{a} - x - y)^2 \Leftrightarrow MN = \left\|\mathrm{a} - x - y\right\|$ Vì $\frac{x}{a-x} < 1$ nên $x < \frac{a}{2}$; $\frac{y}{a-y} < 1$ nên $y < \frac{a}{2}$ $\begin{cases} x < \frac{1}{2}a \\ y < \frac{1}{2}a \end{cases} \Rightarrow x + y < a$ nên $a - (x+y) > 0$ hay $a - x - y > 0$ Vậy $MN = \mathrm{a} - x - y$ (đpcm)		