PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THANH OAI

ĐỀ CHÍNH THỨC

*(Đề thi gồm **01** trang)*

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9
Năm học 2023-2024

Môn: **TOÁN**
Ngày thi: 09/11/2023
Thời gian làm bài: 150 phút

Câu I (5 điểm)

1. Cho biểu thức: $P=\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^3}-1}-\dfrac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}\right):\left(\dfrac{3}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{2\sqrt{x}+5}{1-x}\right)$

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức *P*.

b) Tính giá trị của *P* khi $x=\dfrac{8}{3-\sqrt{5}}$.

c) Tìm số tự nhiên *x* để *P* có giá trị là số nguyên tố.

2. Cho số thực *x, y, z* đôi một khác nhau, thỏa mãn $x^3=3x-1; y^3=3y-1; z^3=3z-1$

Chứng minh rằng: $x^2+y^2+z^2=6$

Câu II (5 điểm)

1. Tìm số nguyên *x, y* biết rằng: $2^x+255=y^2$

2. Giải phương trình: $4\sqrt{x+1}=x^2-5x+14$

Câu III (3 điểm)

1. Cho các số nguyên a và b thỏa mãn $S=a^2+b^2+ab+3\left(a+b\right)+2023$ chia hết cho 5. Tìm số dư khi chia $a-b$ cho 5

2. Cho *a, b, c* là độ dài ba cạnh của tam giác có chu vi bằng 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\dfrac{a}{b+c-a}+\dfrac{4b}{c+a-b}+\dfrac{9c}{a+b-c}$

Câu IV (6 điểm)

Cho tam giác *ABC* vuông tại *A* có đường cao *AH* cắt trung tuyến *BE* tại *D*. Gọi *M, N* lần lượt là hình chiếu của *A* lên các đường thẳng *CD, BE*. Chứng minh:

a. $BE.EN=EM^2$ và $AC.\sin B+AB.\sin C=BC$

b. $\widehat{HMC}=\widehat{EHA}$

c. *BM* vuông góc với *MH*

Câu V (1 điểm)

Trong mặt phẳng cho 8093 điểm mà diện tích của mọi tam giác với các đỉnh là các điểm đã cho không lớn hơn 1. Chứng minh rằng trong số các điểm đã cho có thể tìm được 2024 điểm nằm trong hoặc nằm trên cạnh của một tam giác có diện tích không lớn hơn 1.

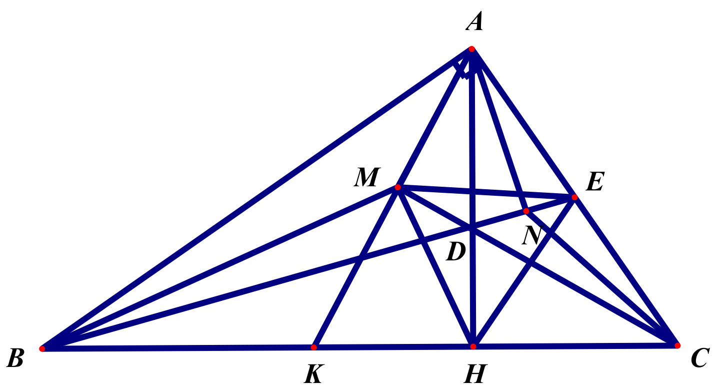
- Hết -

(Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm. Thí sinh không dùng máy tính cầm tay)

Họ tên thí sinh: ………………………………………………………………… Số báo danh: …………

HƯỚNG DẪN CHẤM THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9
Năm học 2023-2024
Môn: **TOÁN**

Câu I (5 điểm)	
1. ĐKXĐ: $x \geq 0$ và $x \neq 1; x \neq 4$.	0,25
a) $P = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$.	1,25
b) $P = \dfrac{7+3\sqrt{5}}{4}$.	1
c) Ta có: $P = 1 + \dfrac{3}{\sqrt{x}-2}$.	0,25
Nếu x không là số chính phương thì P không là số tự nhiên: loại, suy ra x là số chính phương dẫn đến $\sqrt{x}$ là số tự nhiên.	0,25
Để *P* có giá trị là số tự nhiên thì $\sqrt{x}-2 \in \text{U}^{+}(3) = \{1;3\}$, giải ra x	0,25
Để P là số nguyên tố thì x = 25	0,25
2. Trừ vế với vế của 3 đẳng thức ta có: $$\begin{cases} x^3 = 3x-1 \\ y^3 = 3y-1 \\ z^3 = 3z-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - y^3 = 3(x-y) \\ y^3 - z^3 = 3(y-z) \\ z^3 - x^3 = 3(z-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 3(1) \\ y^2 + zy + z^2 = 3(2) \\ x^2 + xz + z^2 = 3(3) \end{cases}$$	0,5
trừ (1) cho (2) ta được $(x-z)(x+y+z) = 0 \Leftrightarrow x+y+z = 0$	0,5
cộng (1) ;(2) ;(3) ta có $2(x^2+y^2+z^2) + xy + yz + xz = 9\ (*)$	
mà từ x+y+z=0 suy ra $xy + yz + xz = -\dfrac{x^2+y^2+z^2}{2}$ thay vaò (*) ta có đpcm	0,5
Câu II (5 điểm)	
1. $2^x + 255 = y^2$	
Nếu x < 0: loại do y nguyên	0,25
Nếu x = 0 thì $y = \pm 16$	0,5
Nếu x = 1: loại do y nguyên	0,25
Nếu $x \geq 2$: VT chia 4 dư 3 suy ra VP lẻ, nên y lẻ. Đặt $y = 2k+1 (k \in Z)$ suy ra VP chia 4 dư 1 (vô lý)	1
Vậy cặp số (x;y) là (0;16) và (0;-16)	
2. Điều kiện $x \geq 1$.	
$x^2 - 5x + 14 - 4\sqrt{x+1} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + x + 1 - 4\sqrt{x+1} + 4 = 0$	1,5
$\Leftrightarrow (x-3)^2 + \left(\sqrt{x+1}-2\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ \sqrt{x+1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3(TM)$	1,5

Vậy nghiệm của phương trình là $x=3$.	
Câu III (3 điểm)	
1. Ta có $S=a^2+b^2+ab+3(a+b)+2023$ chia hết cho 5 nên ta được $4a^2+4b^2+4ab+12(a+b)+12\vdots 5 \Leftrightarrow (2a+b+3)^2+3(b+1)^2\vdots 5$ Đặt $x=2a+b+3; y=b+1$ thì ta được $x^2+3y^2\vdots 5$. + Nếu y^2 chia hết cho 5, khi đó x^2 cũng chia hết cho 5. Từ đó ta được $\begin{cases}(2a+b+3)^2\vdots 5\\(b+1)\vdots 5\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2a+b+3\vdots 5\\b+1\vdots 5\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2a+b+3\vdots 5\\3(b+1)\vdots 5\end{cases} \Rightarrow (2a+b+3)-(3b+3)\vdots 5$ Từ đó ta được $2(a-b)\vdots 5 \Rightarrow a-b\vdots 5$. Do đó dư trong phép chia $a-b$ cho 5 là 0. + Nếu y^2 chia cho 5 dư 1, khi đó x^2 chia cho 5 dư 2: vô lý. + Nếu y^2 chia cho 5 dư 4, khi đó x^2 chia cho 5 dư 3: vô lý. Vậy dư trong phép chia $a-b$ cho 5 là 0.	0,25 1 0,25
2. $8S=\left(\frac{8a}{b+c-a}+4\right)+\left(\frac{32b}{c+a-b}+16\right)+\left(\frac{72c}{a+b-c}+36\right)-56$ $\Leftrightarrow 8S=(a+b+c)\left(\frac{2^2}{b+c-a}+\frac{4^2}{c+a-b}+\frac{6^2}{a+b-c}\right)-56$ $\Rightarrow 8S\ge (a+b+c)\frac{(2+4+6)^2}{a+b+c}-56=88 \Leftrightarrow S\ge 11$ Dấu "=" xảy ra khi $a=\frac{5}{6}, b=\frac{2}{3}, c=\frac{1}{2}$	0,5 0,5 0,5
Câu IV (6 điểm)  	
1. Chứng minh $ME^2=AE^2=EN.EB$ $AC.\sin B+AB.\sin C=\frac{AC^2}{BC}+\frac{AB^2}{BC}=BC$	1,5 1,5
2. Kéo dài AM cắt BC tại K. Chứng minh $\Delta KMC \backsim \Delta KHA(g-g)$ suy ra $\Delta KMH \backsim \Delta KCA(c-g-c)$ $\Rightarrow \widehat{KMH}=\widehat{HCA} \Rightarrow \widehat{HMC}=\widehat{HAC}=\widehat{EHA}$ (do tam giác AHE cân tại E)	0,5 1
3. Do $EC^2=ME^2=EN.EB$ (c/m câu a)	

nên $\dfrac{EC}{EN}=\dfrac{EB}{EC}\Rightarrow \Delta ENC\backsim\Delta ECB\Rightarrow \widehat{ECN}=\widehat{EBC}(1)$ Có $\Delta DNA\backsim\Delta DHB\Rightarrow\dfrac{DN}{DH}=\dfrac{DA}{DB}(2);\Delta DCH\backsim\Delta DAM\Rightarrow\dfrac{DC}{DH}=\dfrac{DA}{DM}(3)$	0,5
Từ (2),(3) suy ra $\dfrac{DN}{DC}=\dfrac{DM}{DB}\Rightarrow\Delta DNC\backsim\Delta DMB\Rightarrow\widehat{NCD}=\widehat{MBD}\Rightarrow\widehat{ECD}=\widehat{MBH}$ (4)	0,5
Do $\widehat{HMC}=\widehat{HAC}$ (c/m câu b) nên $\Delta DMH\backsim\Delta DAC(g-g)\Rightarrow\widehat{MHA}=\widehat{MCA}$ (5) Từ (4) và (5) suy ra:	0,25
$\widehat{MHA}=\widehat{MBH}\Rightarrow\widehat{MBH}+\widehat{MHB}=90^0\Rightarrow\widehat{BMH}=90^0\Rightarrow BM\perp MH$	0,25
Câu V (1 điểm) Gọi A_iA_j là hai điểm xa nhau nhất trong các điểm thuộc tập hợp 8093 điểm đã cho . Giả sử A_k là điểm cách xa đoạn thẳng A_iA_j nhất. Khi đó: Tam giác $A_iA_j\,A_k$ là tam giác lớn nhất và có diện tích không lớn hơn 1 Vẽ các đường thẳng đi qua các điểm A_i, A_j, A_k lần lượt song song với các cạnh của $\Delta A_iA_jA_k$, các đường thẳng này cắt nhau tạo nên 4 tam giác nhỏ bằng nhau và một tam giác lớn chứa cả 4 tam giác nhỏ.	0,5
Tam giác lớn có diện tích không quá 4 đơn vị. Do đó, tam giác lớn chứa tất cả 8093 điểm đã cho, 8093 chia cho 4 được 2023 và dư là 1 nên theo nguyên lý Dirichle suy ra có ít nhất 1 trong 4 tam giác có chứa 2024 trong 8093 điểm đã cho.	0,5

(Lưu ý: Thí sinh có thể làm bài theo cách khác, đúng vẫn cho điểm tối đa)