PHÒNG GD&ĐT BÌNH XUYÊN

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP HUYỆN
NĂM HỌC 2023 - 2024
MÔN TOÁN
Thời gian làm bài: 150 phút, không kể thời gian giao đề

Câu 1. (4,0 *điểm*).

a) Cho biểu thức $P=\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}-1}\right):\left(\dfrac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}+1}+\dfrac{1}{x+1}\right)$. Rút gọn biểu thức P.

b) Cho biểu thức $Q=x^4+2x^3+x^2+2023$. Tính giá trị của biểu thức Q với $x=\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}}$.

Câu 2. (2,0 *điểm*). Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Chứng minh $a.\sqrt{\left(4-b^2\right)\left(4-c^2\right)}+b.\sqrt{\left(4-c^2\right)\left(4-a^2\right)}+c.\sqrt{\left(4-a^2\right)\left(4-b^2\right)}=8+abc$.

Câu 3. (2,0 *điểm*). Tìm tất cả các số tự nhiên n thỏa mãn $n^4-2n^3+2n^2-2n+1$ là số chính phương.

Câu 4. (2,0 *điểm*). Giải phương trình: $2\left(\dfrac{x+2}{x+6}\right)^2+\left(\dfrac{x+6}{x+9}\right)^2=\dfrac{3x+6}{x+9}$.

Câu 5. (2,0 *điểm*). Chia đa thức $p(x)=x^{2024}+x^{2023}+x^{2022}+...+x+1$ cho đa thức $q(x)=x^2-1$ ta được thương là đa thức $h(x)$ và phần dư là đa thức $r(x)$. Tính $h(-1)$.

Câu 6. (2,0 *điểm*). Cho tam giác *ABC* vuông tại $A\left(AB<AC\right)$ có đường cao $AH\left(H\in BC\right)$. Trên tia HC lấy điểm *D* thỏa mãn $HD=HA$. Đường thẳng qua *D* song song với *AH* cắt *AC* tại *E*. Chứng minh tam giác *ADC* đồng dạng với tam giác *BEC* và tính độ dài *BC* khi $AE=6(\text{cm}), EC=2(\text{cm})$.

Câu 7. (2,0 *điểm*). Cho hình vuông *ABCD*, điểm *N* thuộc cạnh *CD* thỏa mãn $NC=2ND$. Gọi *H* là giao điểm của *AN* với *BD* và *M* là trung điểm *BC*. Chứng minh tam giác *AHM* vuông cân.

Câu 8. (2,0 *điểm*). Cầu thang đi từ tầng một lên tầng hai của một ngôi nhà được thiết kế liên tục một nhịp với 21 bậc, mỗi bậc có chiều cao và chiều rộng mặt bậc bằng nhau (Ảnh bên). Biết chiều cao từ mặt sàn tầng một đến mặt sàn tầng hai là 3,57m và chiều rộng của mỗi mặt bậc là 25cm. Hỏi vị trí bắt đầu xây cầu thang ở mặt sàn tầng một cách ví trí chân tường xây chắn tại cuối cầu thang bao nhiêu mét và cầu thang dài bao nhiêu mét?

Câu 9. (2,0 *điểm*). Cho a,b,c là các số thực dương và thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $T=\dfrac{a}{a^2+8bc}+\dfrac{b}{b^2+8ca}+\dfrac{c}{c^2+8ab}$.

----- HẾT------

Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm!

Họ và tên thí sinh:.. Số báo danh:...

PHÒNG GD&ĐT BÌNH XUYÊN

ĐÁP ÁN KSCL ĐỘI TUYỂN HSG LỚP 9
NĂM HỌC 2023-2024
MÔN: TOÁN

Câu 1.a (2,0 *điểm*)

Cho biểu thức $P=\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}-1}\right):\left(\frac{x+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}+1}+\frac{1}{x+1}\right)$. Rút gọn biểu thức P.

Nội dung	Điểm
Điều kiện $x\ge 0, x\ne 1$	0,5
Ta có $P=\left(\frac{1}{\sqrt{x}-1}-\frac{2\sqrt{x}}{(x+1)\left(\sqrt{x}-1\right)}\right):\left(\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x+1)\left(\sqrt{x}+1\right)}+\frac{1}{x+1}\right)$	0,5
$=\frac{x+1-2\sqrt{x}}{(x+1)\left(\sqrt{x}-1\right)}:\frac{\sqrt{x}+1}{x+1}=\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{(x+1)\left(\sqrt{x}-1\right)}:\frac{\sqrt{x}+1}{x+1}$	0,5
$=\frac{\sqrt{x}-1}{x+1}.\frac{x+1}{\sqrt{x}+1}=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$	0,5

Câu 1.b (2,0 *điểm*). Cho biểu thức $Q=x^4+2x^3+x^2+2023$. Tính giá trị của biểu thức Q với $x=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}}$.

Nội dung	Điểm
Ta có $x=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}}=\sqrt{\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}{\left(\sqrt{5}+1\right)\left(\sqrt{5}-1\right)}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	0,5
$x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\Leftrightarrow 2x+1=\sqrt{5}\Rightarrow(2x+1)^2=5\Leftrightarrow x^2+x-1=0\,(1)$	0,5
$Q=x^4+2x^3+x^2+2023=\left[\left(x^2+x\right)^2-1\right]+2024=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+x-1\right)+2024\,(2)$	0,5
Từ (1) và (2) ta được $Q=2024$	0,5

Câu 2 (2,0 *điểm*). Cho ba số thực dương a,b,c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Chứng minh $a\sqrt{\left(4-b^2\right)\left(4-c^2\right)}+b\sqrt{\left(4-c^2\right)\left(4-a^2\right)}+c\sqrt{\left(4-a^2\right)\left(4-b^2\right)}=8+abc$.

Nội dung	Điểm
Ta có $a\sqrt{\left(4-b^2\right)\left(4-c^2\right)}=a\sqrt{16-4\left(b^2+c^2\right)+b^2c^2}=a\sqrt{16-4\left(4-a^2-abc\right)+b^2c^2}$ $=a\sqrt{4a^2+4abc+b^2c^2}=a\sqrt{(2a+bc)^2}=a(2a+bc)=2a^2+abc$	0,5
Tương tự $b\sqrt{\left(4-c^2\right)\left(4-a^2\right)}=2b^2+abc;\quad c\sqrt{\left(4-a^2\right)\left(4-b^2\right)}=2c^2+abc$	0,5
$a\sqrt{\left(4-b^2\right)\left(4-c^2\right)}+b\sqrt{\left(4-c^2\right)\left(4-a^2\right)}+c\sqrt{\left(4-a^2\right)\left(4-b^2\right)}=2\left(a^2+b^2+c^2\right)+3abc$	0,5
$=2\left(a^2+b^2+c^2+abc\right)+abc=8+abc$	0,5

Câu 3. (2,0 *điểm*). Tìm tất cả các số tự nhiên n thỏa mãn $n^4-2n^3+2n^2-2n+1$ là số chính phương.

Nội dung	**Điểm**
Ta có $n^4-2n^3+2n^2-2n+1=\left(n^4-2n^3+n^2\right)+\left(n^2-2n+1\right)=\left(n^2-n\right)^2+\left(n-1\right)^2$ $=n^2\left(n-1\right)^2+\left(n-1\right)^2=\left(n-1\right)^2\left[n^2+1\right]$	**0,5**
* Nếu $n-1=0\Leftrightarrow n=1$ thì $n^4-2n^3+2n^2-2n+1=0$ là số chính phương. * Nếu $n-1\neq 0\Leftrightarrow n\neq 1$ thì $n^4-2n^3+2n^2-2n+1$ là số chính phương khi $n^2+1=m^2\left(m\in\mathbb{N},m>n\right)$	**0,5**
$m^2-n^2=1\Leftrightarrow\left(m+n\right)\left(m-n\right)=1.1\Leftrightarrow\begin{cases}m-n=1\\m+n=1\end{cases}\Leftrightarrow\left(m;n\right)=\left(1;0\right)$	**0,5**
KL $n\in\left\{0;1\right\}$	**0,5**

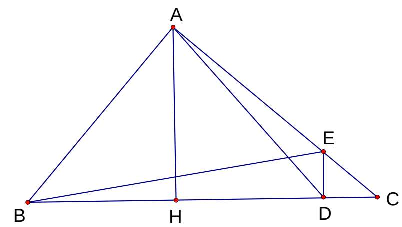
Câu 4. (2,0 *điểm*). Giải phương trình: $2\left(\dfrac{x+2}{x+6}\right)^2+\left(\dfrac{x+6}{x+9}\right)^2=\dfrac{3x+6}{x+9}$.

Nội dung	**Điểm**
ĐK $x\neq -6,\ x\neq -9$ $2\left(\dfrac{x+2}{x+6}\right)^2+\left(\dfrac{x+6}{x+9}\right)^2=\dfrac{3x+6}{x+9}\Leftrightarrow 2\left(\dfrac{x+2}{x+6}\right)^2+\left(\dfrac{x+6}{x+9}\right)^2=3\dfrac{x+2}{x+9}$	**0,5**
Đặt $a=\dfrac{x+2}{x+6},\ b=\dfrac{x+6}{x+9}\Rightarrow\dfrac{x+2}{x+9}=ab$ Phương trình có dạng $2a^2+b^2=3ab\Leftrightarrow\left(a-b\right)\left(2a-b\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b\\2a=b\end{array}\right.$	**0,5**
$*\ a=b\Leftrightarrow\dfrac{x+2}{x+6}=\dfrac{x+6}{x+9}\Leftrightarrow x+18=0\Leftrightarrow x=-18$ thỏa mãn.	**0,5**
$*\ 2a=b\Leftrightarrow\dfrac{2x+4}{x+6}=\dfrac{x+6}{x+9}\Leftrightarrow x^2+10x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-10\end{array}\right.$ thỏa mãn. Kết luận......	**0, 5**

Câu 5. (2,0 *điểm*). Chia đa thức $p\left(x\right)=x^{2024}+x^{2023}+x^{2022}+...+x+1$ cho đa thức $q\left(x\right)=x^2-1$ ta được thương là đa thức $h\left(x\right)$ và phần dư là đa thức $r\left(x\right)$. Tính $h\left(-1\right)$.

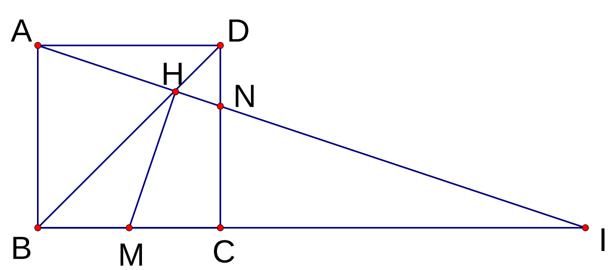
Nội dung	**Điểm**
Dễ thấy $r\left(x\right)=ax+b$ và $p\left(x\right)=q\left(x\right).h\left(x\right)+r\left(x\right)\Leftrightarrow x^{2024}+x^{2023}+x^{2022}+...+x+1=\left(x^2-1\right).h\left(x\right)+ax+b\left(1\right)$	**0,5**
Thay lần lượt các giá trị $x=1,x=-1$ vào hai vế của (1) ta được $\begin{cases}a+b=2025\\-a+b=-1\end{cases}\Leftrightarrow\left(a;b\right)=\left(1012;1013\right)$ $\Rightarrow x^{2024}+x^{2023}+x^{2022}+...+x+1=\left(x^2-1\right).h\left(x\right)+1012x+1013\left(1\right)$	**0,5**
$\Leftrightarrow\left(x^{2024}+x^{2023}\right)+\left(x^{2022}+x^{2021}\right)+...+\left(x^2+x\right)+\left(1-1012x-1013\right)=\left(x^2-1\right).h\left(x\right)$ $\Leftrightarrow x^{2023}\left(x+1\right)+x^{2021}\left(x+1\right)+....+x\left(x+1\right)-1012\left(x+1\right)=\left(x-1\right)\left(x+1\right)h\left(x\right)$ $\Rightarrow x^{2023}+x^{2021}+x^{2019}+...+x-1012=\left(x-1\right)h\left(x\right)\left(2\right)\ \left(x\neq 1\right)$	**0,5**
Cho $x=-1$ vào hai vế của (2) ta được $-2024=-2.h\left(-1\right)\Leftrightarrow h\left(-1\right)=1012$	**0,5**

Câu 6. (2,0 *điểm*) Cho tam giác ABC vuông tại $A(AB < AC)$ có đường cao $AH(H \in BC)$. Trên tia HC lấy điểm D thỏa mãn $HD = HA$. Đường thẳng qua D song song với AH cắt AC tại E. Chứng minh tam giác ADC đồng dạng với tam giác BEC và tính độ dài BC khi $AE = 6(\text{cm}), EC = 2(\text{cm})$.



Nội dung	Điểm
Ta có hai tam giác vuông $\Delta CDE \backsim \Delta CAB \Rightarrow \dfrac{CD}{CE} = \dfrac{CA}{CB}$	**0,5**
Xét ΔADC và ΔBEC $\dfrac{CD}{CA} = \dfrac{CE}{CB}$, C - chung $\Rightarrow \Delta ADC \backsim \Delta BEC$ (c-g-c)	**0,5**
Do tam giác AHD cân đỉnh $H \Rightarrow ADC = 180^0 - HDA = 180^0 - 45^0 = 135^0$	**0,5**
$\Delta ADC \backsim \Delta BEC \Rightarrow BEC = ADC = 135^0 \Rightarrow BEA = 45^0$ nên tam giác ABE vuông cân đỉnh $A \Rightarrow AB = AE = 6(\text{cm})$ $AC = AE + EC = 6 + 2 = 8(\text{cm})$	**0,25**
Do ΔABC vuông tại A ta có: $\Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$ $\Rightarrow BC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 10(\text{cm})$	**0,25**

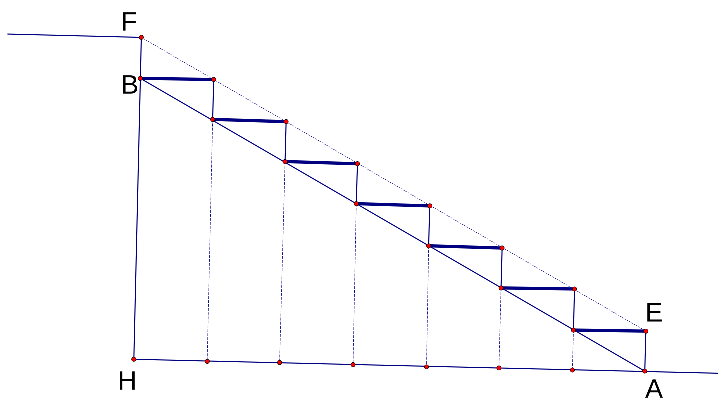
Câu 7. (2,0 *điểm*) Cho hình vuông $ABCD$, điểm N thuộc cạnh CD thỏa mãn $NC = 2ND$. Gọi H là giao điểm của AN với BD và M là trung điểm BC. Chứng minh tam giác AHM vuông cân.



Nội dung	Điểm
Gọi I là giao điểm của AN với BC từ sự đồng dạng của các cặp tam giác $\Delta HND \backsim \Delta HAB$; $\Delta ICN \backsim \Delta IBA$ ta có so sanh sau: $HN = \dfrac{1}{3}HA = \dfrac{1}{4}AN = \dfrac{1}{12}IA \Rightarrow IH = IN + HN = \dfrac{2}{3}IA + \dfrac{1}{12}IA = \dfrac{3}{4}IA(1)$	**0,25**

$MC=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{6}IB\Rightarrow IM=IC+CM=\frac{2}{3}IB+\frac{1}{6}IB=\frac{5}{6}IB\left(2\right)$	**0,25**
Ta có $\left.\begin{array}{l} IH.IA=\frac{3}{4}IA^2=\frac{3}{4}\left(AB^2+IB^2\right)=\frac{3}{4}\left(\left(\frac{1}{3}IB\right)^2+IB^2\right)=\frac{5}{6}IB^2 \\ IM.IB=\frac{5}{6}IB^2 \end{array}\right\}\Rightarrow IH.IA=IM.IB\left(3\right)$	**0,5**
$\left(3\right)\Rightarrow\frac{IM}{IH}=\frac{IA}{IB}\Rightarrow\Delta IHM\backsim\Delta IBA\Rightarrow IHM=IBA=90^0\left(4\right)$	**0,5**
Mặt khác $\left(3\right)\Rightarrow\frac{IH}{IB}=\frac{IM}{IA}\Rightarrow\Delta IHB\backsim\Delta IMA\Rightarrow IAM=IBH=45^0\left(5\right)$ Từ (4),(5) ta được điều phải chứng minh	**0,5**

Câu 8 (2,0 *điểm*). Cầu thang đi từ tầng một lên tầng hai của một ngôi nhà được thiết kế liên tục một nhịp với 21 bậc, mỗi bậc có chiều cao và chiều rộng mặt bậc bằng nhau. Biết chiều cao từ mặt sàn tầng một đến mặt sàn tầng hai là 3,57m và chiều rộng của mỗi mặt bậc là 25cm. Hỏi vị trí bắt đầu xây cầu thang ở mặt sàn tầng một cách ví trí chân tường xây chắn tại cuối cầu thang bao nhiêu mét và cầu thang dài bao nhiêu mét



(Hình vẽ mặt cắt minh họa cho cầu thang có 8 bậc)

Nội dung	Điểm
Cầu thang có 21 bậc từ tầng một lên tầng hai thì số mặt bậc không phải mặt sàn nhà là 20 mặt. Nên ví trí xây cách vị trí chân tường chắn cuối cầu thang là $20.0,25=5\left(\text{m}\right)$	**0,5**
Do chiều cao từ mặt sàn tầng một đến mặt sàn tầng hai bằng tổng chiều cao 21 bậc nên chiều cao một bậc là $3,57:21=0,17\left(\text{m}\right)$	**0,5**
Áp dụng định lí Pitago ta có chiều dài một bậc là $\sqrt{0,17^2+0,25^2}=\frac{\sqrt{914}}{100}\left(\text{m}\right)$	**0,5**
Vậy chiều dài cầu thang là $20\frac{\sqrt{914}}{100}=\frac{\sqrt{914}}{5}\simeq 6,05\left(\text{m}\right)$	**0,5**

Câu 9 (2,0 điểm). Cho a,b,c là các số thực dương và thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $T=\frac{a}{a^2+8bc}+\frac{b}{b^2+8ca}+\frac{c}{c^2+8ab}$.

Nội dung	Điểm
Với các số a,b,c dương. Ta có $T=\frac{a}{a^2+8bc}+\frac{b}{b^2+8ca}+\frac{c}{c^2+8ab}$ $\Rightarrow T=\frac{a^2}{a^3+8abc}+\frac{b^2}{b^3+8abc}+\frac{c^2}{c^3+8abc}\geq\frac{(a+b+c)^2}{a^3+b^3+c^3+24abc}$	**0,5**
Ta lại có $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b+c)(ab+bc+ca)-3abc$ $\geq a^3+b^3+c^3+27\sqrt[3]{abc}.\sqrt[3]{(abc)^2}-3abc=a^3+b^3+c^3+24abc$	**0,5**
Suy ra $a^3+b^3+c^3+24abc\leq(a+b+c)^3$ $\Rightarrow\frac{(a+b+c)^2}{a^3+b^3+c^3+24abc}\geq\frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^3}=\frac{1}{a+b+c}=1$ Do đó $T\geq1$	**0,5**
Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c=\frac{1}{3}$ Vậy $MinT=1$, khi $a=b=c=\frac{1}{3}$	**0,5**

----- HẾT------