SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO GIA LAI	**KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP TỈNH NĂM HỌC 2022 - 2023**
	Môn: Toán
ĐỀ CHÍNH THỨC *(Đề thi có 06 câu, gồm 01 trang)*	**Thời gian: 150 phút** *(không kể thời gian giao đề)* **Ngày thi: 14/02/2023**

Họ và tên thí sinh:………………………….…………………Số báo danh: ……………

Câu 1 *(5,0 điểm).*

a) Chứng minh rằng: $\sqrt{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}}=1+\frac{1}{k(k+1)}$ (Với $k>0$).

Từ đó hãy tính giá trị biểu thức:

$$S=\sqrt{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+...+\sqrt{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2022^2}+\frac{1}{2023^2}}+\frac{1}{2023}.$$

b) Tìm tất cả các cặp số $(x;y)$ nguyên thỏa mãn: $x^2-xy+x+y+5=0$.

Câu 2 *(4,0 điểm).*

a) Cho hàm số $y=(m^2-m+2)x+2m-8$ có đồ thị là đường thẳng d. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng d cắt trục hoành và trục tung lần lượt tại A và B sao cho diện tích tam giác OAB bằng 2 (với O là gốc tọa độ).

b) Cho hai vòi nước chảy vào 1 bồn nước. Nếu cho vòi thứ nhất chảy vào bồn rỗng trong 3 giờ rồi dừng lại, sau đó cho vòi thứ hai chảy tiếp vào trong 8 giờ nữa thì đầy bồn. Nếu cho vòi thứ nhất chảy vào bồn rỗng trong 1 giờ rồi cho cả 2 vòi chảy tiếp trong 4 giờ nữa thì số nước đã chảy vào bằng $\frac{8}{9}$ bồn. Hỏi nếu mỗi vòi chảy riêng thì trong bao lâu nước sẽ đầy bồn đó ?

Câu 3 *(2,0 điểm).*

Cho $x=1+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}$. Chứng tỏ $x^3-3x^2-6x+21$ là số chia hết cho 5 .

Câu 4 *(5,0 điểm).*

Cho đường tròn (O) đường kính $BC=2R$ và điểm A thay đổi trên (O) (điểm A không trùng với B,C). Đường phân giác trong góc A của tam giác ABC cắt đường tròn (O) tại K. Hạ AH vuông góc với BC.

a) Chứng minh rằng khi A thay đổi, tổng AH^2+KH^2 luôn không đổi. Tính góc B của tam giác ABC biết $AH=\frac{\sqrt{3}}{2}R$.

b) Đặt $AH=x$. Tìm x sao cho diện tích tam giác OAH đạt giá trị lớn nhất.

Câu 5 *(2,0 điểm).*

Cho ΔABC vuông tại A biết $AB=3, AC=4$ và AH là đường cao. Gọi $I\in AB$ sao cho $AI=2BI$, CI cắt AH tại E. Tính CE.

Câu 6 *(2,0 điểm).*

Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{(a^2+bc)(b+c)}{a(b^2+c^2)}}+\sqrt{\frac{(b^2+ca)(c+a)}{b(c^2+a^2)}}+\sqrt{\frac{(c^2+ab)(a+b)}{c(a^2+b^2)}}\ge 3\sqrt{2}.$$

-------------------------HẾT-------------------------

Lưu ý: *- Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.*

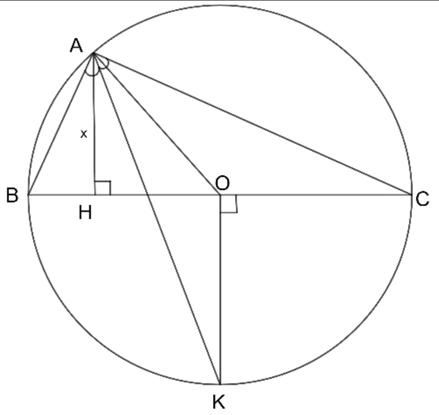
- Giám thị không giải thích gì thêm.

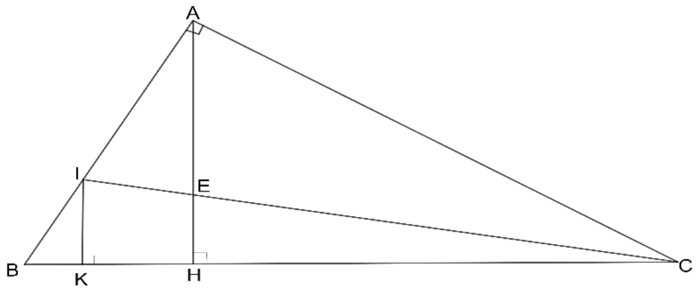
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO GIA LAI	KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP TỈNH NĂM HỌC 2022 – 2023
	Môn thi: **TOÁN**
(Hướng dẫn chấm có 05 trang)	**Ngày thi: 14/02/2023**

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ CHÍNH THỨC
MÔN: TOÁN

Câu	Ý	Đáp án	Điểm
1 **(5,0đ)**	*a)* *3đ*	Chứng minh rằng: $\sqrt{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}}=1+\frac{1}{k(k+1)}$ (Với $k>0$). Từ đó hãy tính giá trị biểu thức: $S=\sqrt{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+...+\sqrt{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2022^2}+\frac{1}{2023^2}}+\frac{1}{2023}$	
		$\sqrt{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}}=\sqrt{\frac{k^2(k+1)^2+(k+1)^2+k^2}{k^2(k+1)^2}}$	0,5
		$=\sqrt{\frac{k^4+2k^3+k^2+k^2+2k+1+k^2}{k^2(k+1)^2}}=\sqrt{\frac{k^4+2k^3+2k^2+k^2+2k+1}{k^2(k+1)^2}}$	0,5
		$=\sqrt{\frac{(k^2+k+1)^2}{k^2(k+1)^2}}=\frac{k^2+k+1}{k(k+1)}$	0,5
		$=\frac{k(k+1)+1}{k(k+1)}=1+\frac{1}{k(k+1)}$ (đpcm).	0,5
		Ta có: $\sqrt{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}}=1+\frac{1}{k(k+1)}=1+\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$	0,25
		Khi đó: $S=\sqrt{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+...+\sqrt{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2022^2}+\frac{1}{2023^2}}+\frac{1}{2023}$ $=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+1+\frac{1}{2022}-\frac{1}{2023}+\frac{1}{2023}$	0,5
		$=2021+\frac{1}{2}=2021,5$.	0,25
	b) *2đ*	Tìm tất cả các cặp số $(x;y)$ nguyên thỏa mãn: $x^2-xy+x+y+5=0$.	
		Ta có : $x^2-xy+x+y+5=0 \Leftrightarrow y(x-1)=x^2+x+5$ (*)	0,25
		Với $x=1$ không thỏa mãn đẳng thức (*). Khi đó (*) $\Leftrightarrow y=\frac{x^2+x+5}{x-1} \Leftrightarrow y=x+2+\frac{7}{x-1}$	0,5
		Vì x, y nguyên nên suy ra: $(x-1)$ là ước nguyên của 7	0,25

		Suy ra: $(x-1)\in\{\pm1;\pm7\}$	0,25
		• $x-1=1\Rightarrow x=2\Rightarrow y=11$ • $x-1=-1\Rightarrow x=0\Rightarrow y=-5$ • $x-1=7\Rightarrow x=8\Rightarrow y=11$ • $x-1=-7\Rightarrow x=-6\Rightarrow y=-5$	0,5
		Vậy có 4 cặp số nguyên thỏa ycbt : $(2;11),\ (0;-5),\ (8;11),\ (-6;-5)$.	0,25
2 **(4,0đ)**	*a)* *2đ*	a) Cho hàm số $y=(m^2-m+2)x+2m-8$ có đồ thị là đường thẳng d. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng d cắt trục hoành và trục tung lần lượt tại A và B sao cho diện tích tam giác OAB bằng 2 (với O là gốc tọa độ).	
		Vì O,A,B tạo thành tam giác nên : $\begin{cases}m^2-m+2\neq0\\2m-8\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\forall m\in\mathbb{R}\\m\neq4\end{cases}$	0,25
		Đường thẳng d cắt trục hoành và trục tung lần lượt tại A và B nên suy ra : $A(\frac{-2m+8}{m^2-m+2};0)\ \&\ B(0;2m-8)$	0,5
		Ta có : $S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}.OA.OB=\frac{1}{2}.\left\|\frac{-2m+8}{m^2-m+2}\right\|.\left\|2m-8\right\|=2$	0,5
		$\Leftrightarrow(m-4)^2=\left\|m^2-m+2\right\|\Leftrightarrow m^2-8m+16=\left\|m^2-m+2\right\|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m^2-8m+16=m^2-m+2\\m^2-8m+16=-m^2+m-2\end{array}\right.$	0,5
		$\Leftrightarrow m=2$ (TMĐK)	0,25
	b) *2đ*	b) Cho hai vòi nước chảy vào 1 bồn nước. Nếu cho vòi thứ nhất chảy vào bồn rỗng trong 3 giờ rồi dừng lại, sau đó cho vòi thứ hai chảy tiếp vào trong 8 giờ nữa thì đầy bồn. Nếu cho vòi thứ nhất chảy vào bồn rỗng trong 1 giờ rồi cho cả 2 vòi chảy tiếp trong 4 giờ nữa thì số nước đã chảy vào bằng $\frac{8}{9}$ bồn. Hỏi nếu mỗi vòi chảy riêng thì trong bao lâu nước sẽ đầy bồn đó ?	
		Gọi x (giờ), y (giờ) lần lượt là thời gian để mỗi vòi chảy riêng đổ đầy bồn nước, $x>0,y>0$.	0,25
		Khi đó, trong 1 giờ : vòi thứ nhất chảy được $\frac{1}{x}$ bồn, vòi thứ hai chảy được $\frac{1}{y}$ bồn.	0,25
		Theo giả thiết bài toán ta có hệ phương trình : $\begin{cases}\frac{3}{x}+\frac{8}{y}=1\\\frac{1}{x}+4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{8}{9}\end{cases}$	0,5
		Đặt : $a=\frac{1}{x},b=\frac{1}{y}$ hệ trở thành : $\begin{cases}3a+8b=1\\5a+4b=\frac{8}{9}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{9}\\b=\frac{1}{12}\end{cases}$	0,5

		Suy ra : $x=9, y=12$.	0,25
		Vậy vòi thứ nhất cần 9 (giờ), vòi thứ hai cần 12 (giờ) để chảy riêng một mình thì đầy bồn.	0,25
		Cho $x=1+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}$. Chứng tỏ $x^3-3x^2-6x+21$ là số chia hết cho 5.	
		Ta có: $x=1+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9} \Leftrightarrow x\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}+3$	0,5
3	*2đ*	$\Leftrightarrow x\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}+1+2 \Leftrightarrow x\sqrt[3]{3}=x+2$	0,5
		$\Leftrightarrow 3x^3=x^3+6x^2+12x+8 \Leftrightarrow x^3-3x^2-6x=4$	0,5
		Từ đó suy ra : $x^3-3x^2-6x+21=4+21=25$ là số chia hết cho 5.	0,5
		Cho đường tròn (O) đường kính $BC=2R$ và điểm A thay đổi trên (O) (điểm A không trùng với B, C). Đường phân giác trong góc A của tam giác ABC cắt đường tròn (O) tại K. Hạ AH vuông góc với BC. a) Chứng minh rằng khi A thay đổi, tổng AH^2+KH^2 luôn không đổi. Tính góc B của tam giác ABC biết $AH=\dfrac{\sqrt{3}}{2}R$.	
			0,25
4	***a)* 3đ**	Góc BAC vuông tại A, AK là đường phân giác trong của góc A nên K là điểm chính giữa cung BC suy ra ΔOHK vuông tại O. Ta có: $OK^2+OH^2=HK^2 \Rightarrow HK^2=R^2+OH^2$ Mặt khác $AH^2+OH^2=R^2 \Rightarrow AH^2=R^2-OH^2$	0,5
		$\Rightarrow AH^2+HK^2=R^2-OH^2+R^2+OH^2=2R^2$ (không đổi)	0,5
		ΔOAH vuông tại H có: $AH=\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$ nên ΔOAH là nửa tam giác đều cạnh bằng R. Suy ra: $\widehat{AOH}=60^0$	0,5
		+ Nếu H thuộc đoạn OB Ta có: ΔOAB cân tại O ($OA=OB=R$) có $\widehat{AOB}=60^0$ Tính được $\widehat{ABC}=60^0$	0,5

		+ Nếu H thuộc đoạn OC Ta có $\widehat{ACB}=60^0 \Rightarrow \widehat{ABC}=90^0-60^0=30^0$	0,5
		Vậy $\widehat{ABC}=60^0$ hoặc $\widehat{ABC}=30^0$	0,25
		b) Đặt $AH=x$. Tìm x sao cho diện tích ΔOAH đạt giá trị lớn nhất.	
		ΔOAH vuông tại H nên: $AH^2+OH^2=OA^2$ $\Rightarrow x^2+OH^2=R^2 \Rightarrow OH^2=R^2-x^2 \Rightarrow OH=\sqrt{R^2-x^2}$ (đvdt)	0,5
		Suy ra: $S_{\Delta OAH}=\frac{1}{2}AH.OH=\frac{1}{2}x\sqrt{R^2-x^2}$	0,5
	b) *2đ*	Theo bất đẳng thức Cô si: Ta có: $S_{\Delta OAH}=\frac{1}{2}x\sqrt{R^2-x^2}\le\frac{1}{2}.\frac{x^2+R^2-x^2}{2}=\frac{R^2}{4}$, trong đó $\frac{R^2}{4}$ không đổi	0,5
		Dấu "=" xảy ra khi x = $\sqrt{R^2-x^2} \Leftrightarrow x^2=R^2-x^2 \Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}R$ Vậy S đạt giá trị lớn nhất là $\frac{R^2}{4}$ khi $x=\frac{\sqrt{2}}{2}R$.	0,5
5	*2đ*	Cho ΔABC vuông tại A biết $AB=3, AC=4$ và AH là đường cao. Gọi $I\in AB$ sao cho $AI=2BI$, CI cắt AH tại E. Tính CE.	
			
		Trong ΔABC có : $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=5$, $AH=\frac{12}{5}$ $BH.BC=AB^2 \Rightarrow BH=\frac{9}{5}$, $CH=\frac{16}{5}$	0,5
		Dựng $IK\perp BC,(K\in BC)$. Khi đó dễ dàng tính được :	1,0

		$BK=\frac{1}{3}BH=\frac{3}{5};\quad CK=\frac{22}{5};\quad IK=\frac{1}{3}AH=\frac{4}{5};\quad IC=\sqrt{IK^2+CK^2}=2\sqrt{5}$	
		Ta có : $\frac{CE}{CI}=\frac{CH}{CK}\Rightarrow CE=\frac{CI.CH}{CK}=\frac{16\sqrt{5}}{11}$	0,5
6	*2đ*	Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng: $$\sqrt{\frac{(a^2+bc)(b+c)}{a(b^2+c^2)}}+\sqrt{\frac{(b^2+ca)(c+a)}{b(c^2+a^2)}}+\sqrt{\frac{(c^2+ab)(a+b)}{c(a^2+b^2)}}\ge 3\sqrt{2}.$$	
		Ta có: $(a^2+bc)(b+c)=a^2b+a^2c+b^2c+bc^2=b(a^2+c^2)+c(a^2+b^2)$ Tương tự: $(b^2+ca)(c+a)=c(b^2+a^2)+a(b^2+c^2)$ $(c^2+ab)(a+b)=a(c^2+b^2)+b(c^2+a^2)$	0,5
		Đặt: $x=a(b^2+c^2);y=b(c^2+a^2);z=c(b^2+a^2)$ Khi đó: $\sqrt{\frac{(a^2+bc)(b+c)}{a(b^2+c^2)}}+\sqrt{\frac{(b^2+ca)(c+a)}{b(c^2+a^2)}}+\sqrt{\frac{(c^2+ab)(a+b)}{c(a^2+b^2)}}=\sqrt{\frac{y+z}{x}}+\sqrt{\frac{z+x}{y}}+\sqrt{\frac{x+y}{z}}$ Áp dụng BĐT Cô si cho 2 số không âm x,y,z: $x+y\ge 2\sqrt{xy}$ $y+z\ge 2\sqrt{yz}$ $z+x\ge 2\sqrt{zx}$ $\Rightarrow (x+y)(y+z)(z+x)\ge 8xyz$	0,5
		Áp dụng BĐT Cô si cho 3 số không âm: $\sqrt{\frac{y+z}{x}};\sqrt{\frac{z+x}{y}};\sqrt{\frac{x+y}{z}}$ Ta có: $\sqrt{\frac{y+z}{x}}+\sqrt{\frac{z+x}{y}}+\sqrt{\frac{x+y}{z}}\ge 3\sqrt[3]{\sqrt{\frac{(y+z)(z+x)(x+y)}{x.y.z}}}\ge 3\sqrt[3]{\sqrt{8}}=3\sqrt{2}$	0,5
		$\Rightarrow\sqrt{\frac{(a^2+bc)(b+c)}{a(b^2+c^2)}}+\sqrt{\frac{(b^2+ca)(c+a)}{b(c^2+a^2)}}+\sqrt{\frac{(c^2+ab)(a+b)}{c(a^2+b^2)}}\ge 3\sqrt{2}$ (đpcm)	0,5

Lưu ý : - Thí sinh giải cách khác, đúng và lập luận chặt chẽ vẫn được điểm tối đa.
- Điểm toàn bài không làm tròn.

.............Hết.............

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP TỈNH**
GIA LAI **NĂM HỌC 2022 - 2023**
Môn: Toán

ĐỀ DỰ BỊ **Thời gian: 150 phút** *(không kể thời gian giao đề)*
(Đề thi có 06 câu, gồm 01 trang) **Ngày thi: 14/02/2023**

Họ và tên thí sinh:………………………….…………………Số báo danh: ……………

Câu 1 *(5,0 điểm).*

a) Tính giá trị biểu thức: $S=\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+...\frac{1}{\sqrt{2023}+\sqrt{2025}}$.

b) Tìm tất cả các cặp số $(x;y)$ nguyên thỏa mãn: $x^2-xy-3x+2y+7=0$.

Câu 2 *(4,0 điểm).*

a) Cho hàm số $y=(m^2-m-1)x+m$ có đồ thị là đường thẳng d. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng d cắt trục hoành và trục tung lần lượt tại A và B sao cho diện tích tam giác OAB bằng $\frac{1}{2}$ (với O là gốc tọa độ).

b) Một máy cày lớn và máy cày nhỏ cùng cày một cánh đồng trong 1 ngày rồi giao lại cho máy cày nhỏ thì cần thêm 9 ngày nữa mới cày xong. Nếu cả hai máy cày cùng làm việc thì chỉ cần 4 ngày là cày xong. Hỏi mỗi máy nếu cày riêng thì cần mấy ngày để cày xong cánh đồng đó ?

Câu 3 *(2,0 điểm).*

Cho $x=1+\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{49}$. Chứng tỏ $x^3-3x^2-18x+13$ là số chính phương .

Câu 4 *(5,0 điểm).*

Đoạn thẳng AC có độ dài bằng a, lấy điểm B sao cho $AB=\frac{1}{4}AC$. Tia Cx vuông góc với AC tại C. Trên tia Cx lấy điểm D bất kỳ (D không trùng với C). Từ B kẽ đường vuông góc với AD cắt hai đường thẳng AD và CD lần lượt tại K và E.

a) Xác định vị trí điểm D để diện tích tam giác BED nhỏ nhất.

b) Chứng minh rằng khi D di chuyển trên tia Cx thì đường tròn đường kính DE luôn có một cung cố định.

Câu 5 *(2,0 điểm).*

Cho tứ giác $ABCD$. Gọi E,F lần lượt là trung điểm của AD và BC. Tìm điều kiện của tứ giác $ABCD$ để $EF=\frac{AB+CD}{2}$.

Câu 6 *(2,0 điểm).* Cho a,b,c là các số thực dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^2}{c^3}+\frac{c^2}{a^3}\ge\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}.$$

-------------------------HẾT-------------------------

Lưu ý: *- Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.*
- Giám thị không giải thích gì thêm.