

ĐỀ RA:

Câu 1 (2,0 điểm): Cho biểu thức

$$P = \frac{x+1}{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} + \frac{x^2-x\sqrt{x}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-x\sqrt{x}} \text{ với } x > 0; x \neq 1$$

- Rút gọn biểu thức P
- Chứng minh rằng $P > 4$ với $x > 0; x \neq 1$.

Câu 2 (2,0 điểm):

- Cho ba số $a, b, c \neq 0$ thỏa mãn $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b}$

Tính giá trị của biểu thức $A = (a-b)(b-c)(c-a)(a+2b+3c)^{2022} + 2023$

- Giải phương trình: $\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2 - \left(\frac{2x+4}{x-3}\right)^2 + 3 \cdot \frac{x-1}{x-3} = 0$

Câu 3 (1,5 điểm): Cho x, y là các số dương thỏa mãn điều kiện $x + y \geq 6$. Tìm giá

trị nhỏ nhất của biểu thức $M = 3x + 2y + \frac{6}{x} + \frac{8}{y}$

Câu 4 (3,5 điểm): Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, các đường cao BD, CE cắt nhau tại H .

- Chứng minh $CH \cdot CE = CD \cdot CA$
- Kẻ $EK \perp AC$ tại K , kẻ $DI \perp EC$ tại I . Chứng minh $AH \parallel IK$
- Chứng minh $S_{\Delta EIK} \leq \frac{1}{4} S_{\Delta ABC}$

Câu 5 (1,0 điểm): Chứng minh tích của bốn số tự nhiên liên tiếp cộng với 1 luôn là một số chính phương.

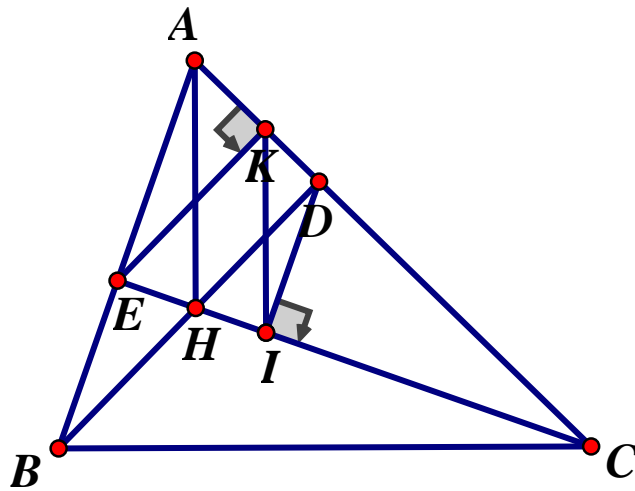
Ghi chú:

- Học sinh không được sử dụng tài liệu, máy tính cầm tay.
- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu	Đáp án	Điểm
Câu 1	$a) P = \frac{x+1}{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} + \frac{x^2-x\sqrt{x}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-x\sqrt{x}}$ $= \frac{x+1}{\sqrt{x}} + \frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} - \frac{(\sqrt{x}-1)(x\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(x-1)}$ $= \frac{x+1}{\sqrt{x}} + \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} - \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$ $= \frac{x+1}{\sqrt{x}} + \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} - \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ $= \frac{x+1+x+\sqrt{x}+1-x+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$ $= \frac{x+2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$	0,25
	$b) \text{ Ta có } P = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 2 \geq 2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}} + 2 = 4 \text{ (Theo BĐT Côsi)}$	0,25
	$P = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = 1 \text{ (loại do } x \neq 1)$	0,25
	<p>Vậy $P > 4 \quad \forall x > 0, x \neq 1.$</p>	0,25
Câu 2	$a) \text{ Với } a, b, c \neq 0, \text{ ta có } \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b}$ $\Leftrightarrow \frac{a}{b} - \frac{a}{c} - \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} - \frac{b}{a} = 0$ $\Leftrightarrow \frac{a-c}{b} - \frac{(a+c)(a-c)}{ac} + \frac{b(a-c)}{ac} = 0$ $\Leftrightarrow (a-c) \left(\frac{1}{b} - \frac{a+c}{ac} + \frac{b}{ac} \right) = 0$ $\Leftrightarrow (a-c)(ac - ab - bc + b^2) = 0$ $\Leftrightarrow (a-c)(c-b)(a-b) = 0$ $\Leftrightarrow (a-b)(b-c)(c-a) = 0$	0,25
	$A = (a-b)(b-c)(c-a)(a+2b+3c)^{2022} + 2023$ $= 0 + 2023 = 2023$	0,25
	$b) \left(\frac{x-1}{x+2} \right)^2 - \left(\frac{2x+4}{x-3} \right)^2 + 3 \cdot \frac{x-1}{x-3} = 0 \quad \text{ĐKXD: } x \neq -2; x \neq 3$ $\Leftrightarrow \left(\frac{x-1}{x+2} \right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{x+2}{x-3} \right)^2 + 3 \cdot \frac{x-1}{x-3} = 0 \quad (1)$	

	<p>Đặt $a = \frac{x-1}{x+2}$; $b = \frac{x+2}{x-3} \Rightarrow ab = \frac{x-1}{x-3}$</p> <p>Phương trình (1) trở thành $a^2 - 4b^2 + 3ab = 0$</p> <p>$\Leftrightarrow a^2 - b^2 + 3ab - 3b^2 = 0$</p> <p>$\Leftrightarrow (a-b)(a+4b) = 0$</p> <p>$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = -4b \end{cases}$</p> <p>+ Trường hợp $a = b \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+2} = \frac{x+2}{x-3}$</p> <p>$\Leftrightarrow (x-1)(x-3) = (x+2)^2$</p> <p>$\Leftrightarrow 8x+1=0$</p> <p>$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{8}$ (TM)</p> <p>+ Trường hợp $a = -4b \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+2} = \frac{-4(x+2)}{x-3}$</p> <p>$\Leftrightarrow (x-1)(x-3) = -4(x+2)^2$</p> <p>$\Leftrightarrow 5x^2 + 12x + 19 = 0$</p> <p>$\Leftrightarrow 5\left(x + \frac{6}{5}\right)^2 + \frac{59}{5} = 0$ (PTVN)</p> <p>Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x = -\frac{1}{8}$</p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>
<p>Câu 3</p>	<p>$M = 3x + 2y + \frac{6}{x} + \frac{8}{y}$</p> <p>$\Leftrightarrow 2M = 2\left(3x + 2y + \frac{6}{x} + \frac{8}{y}\right) = 3x + y + \left(3x + \frac{12}{x}\right) + \left(y + \frac{16}{y}\right)$</p> <p>Từ giả thiết và theo BĐT Cô – si, ta có:</p> <p>$3x + y \geq 3 \cdot 6 = 18$</p> <p>$3x + \frac{12}{x} \geq 2\sqrt{3x \cdot \frac{12}{x}} = 12$</p> <p>$y + \frac{16}{y} \geq 2\sqrt{y \cdot \frac{16}{y}} = 8$</p> <p>Do đó, $2M \geq 18 + 12 + 8 = 38 \Rightarrow M \geq 19$</p> <p>Vậy $\min M = 19$. Dấu “=” xảy ra khi $x = 2$; $y = 4$.</p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>

Câu
4



0,5

a) Xét $\triangle CHD$ và $\triangle CAE$ có $\left. \begin{array}{l} ECA \text{ chung} \\ CDH = CEA = 90^\circ \end{array} \right\}$
 $\Rightarrow \triangle CHD$ đồng dạng với $\triangle CAE$ (g.g)
 $\Rightarrow \frac{CH}{CA} = \frac{CD}{CE} \Rightarrow CH \cdot CE = CD \cdot CA$

0,25

0,25

0,25

0,25

b) Xét $\triangle CID$ và $\triangle CKE$ có: $CID = CKE = 90^\circ$

$\left. \begin{array}{l} ICD \text{ chung} \\ \Rightarrow \triangle CID \text{ đồng dạng với } \triangle CKE \text{ (g-g)} \end{array} \right\}$

0,25

$\Rightarrow \frac{CI}{CK} = \frac{CD}{CE}$ (1) mà $\frac{CD}{CE} = \frac{CH}{CA}$ (c/m a) (2)

0,25

Từ (1), (2) $\Rightarrow \frac{CI}{CK} = \frac{CH}{CA} \Rightarrow \frac{CI}{CH} = \frac{CK}{CA}$

0,25

Xét $\triangle CAH$ có: $\frac{CI}{CH} = \frac{CK}{CA}$ (cmt) $\Rightarrow IK \parallel AH$ (ĐL Ta-lét đảo)

0,25

c) Có $IK \parallel AH$ (cm b) $\Rightarrow KIE = AHE$ (đồng vị)

Mà $ABC = AHE$ (cùng phụ với EAH)

$\Rightarrow ABC = KIE$

+ Xét $\triangle EIK$ và $\triangle ABC$ có: $KIE = ABC$ (cmt)

0,25

$\left. \begin{array}{l} IEK = BAC \text{ (cùng phụ với } ACE) \\ \Rightarrow \triangle EIK \text{ đồng dạng với } \triangle ABC \text{ (g-g)} \end{array} \right\}$

$\Rightarrow \frac{S_{\triangle EIK}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{EK}{AC} \right)^2 = \frac{EK^2}{AC^2}$

0,25

+ $\triangle AEC$ vuông tại E , đường cao $EK \Rightarrow EK^2 = AK \cdot CK$ (hệ thức lượng)

0,25

$\Rightarrow \frac{S_{\triangle EIK}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{AK \cdot CK}{AC^2} = \frac{4AK \cdot CK}{4AC^2} \leq \frac{AK + CK^2}{4AC^2} = \frac{AC^2}{4AC^2} = \frac{1}{4}$

0,25

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow AK = CK$.

<p>Câu 5</p>	<p>Gọi 4 số tự nhiên, liên tiếp đó là: $n, n+1, n+2, n+3$ ($n \in N$).</p>	<p>0,25</p>
	<p>Ta có: $n(n+1)(n+2)(n+3) + 1$ $= n.(n+3)(n+1)(n+2) + 1$ $= (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) + 1$ (*)</p>	<p>0,25</p>
	<p>Đặt $n^2 + 3n = t$ ($t \in N$) thì (*) $= t(t+2) + 1 = t^2 + 2t + 1 = (t+1)^2$.</p>	<p>0,25</p>
	<p>$\Rightarrow n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2$.</p>	<p>0,25</p>
	<p>Vì $n \in N$ nên $n^2 + 3n + 1 \in N$. Vậy $n(n+1)(n+2)(n+3) + 1$ là số chính phương.</p>	