

I. PHẦN TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN: (16 câu; 8,0 điểm)

Thí sinh làm bài (cả phần trắc nghiệm khách quan và tự luận) trên tờ giấy thi

Câu 1. Giá trị của a để đa thức $x^{2023} - 3x - a$ chia hết cho đa thức $x - 1$ là

- A. 1. B. -1. C. 2. D. -2.

Câu 2. Cho đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4$ và $g(x) = x^2 + x - 2$ biết rằng $f(x)$ chia hết cho $g(x)$ khi đó $(a; b)$ bằng

- A. $(-4; -2)$. B. $(2; -8)$. C. $(-2; -8)$. D. $(-2; 8)$.

Câu 3. Rút gọn biểu thức $P = \left[\frac{(a-1)^2}{3a+(a-1)^2} - \frac{1-2a^2+4a}{a^3-1} + \frac{1}{a-1} \right] : \frac{a^3+4a}{4a^2}$ ta được

- A. $-\frac{4a}{a^2+4}$ với $a \neq 0; a \neq 1$. B. $\frac{4a}{a^2+4}$ với $a \neq 0; a \neq -1$.
C. $\frac{4a}{a^2+4}$ với $a \neq 0; a \neq 1$. D. $\frac{4a}{a^2-4}$ với $a \neq 0; a \neq 1$.

Câu 4. Gọi A là tập hợp các giá trị nguyên của n để biểu thức $\frac{25n^2 - 97n + 7}{n - 4}$ nhận giá trị nguyên. Số các phần tử dương của A bằng

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 5. Biết $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}} = \frac{ax - b}{cx + 1}$. Giá trị của $a^2 + b^2 - c$ bằng

- A. 11. B. 3. C. 15. D. 9.

Câu 6. Tổng các nghiệm của phương trình $(x+2)(3-4x) + (x^2+4x+4) = 0$ bằng

- A. $-\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $-\frac{11}{3}$. D. $\frac{11}{3}$.

Câu 7. Giá trị của a nguyên dương để phương trình $\frac{x+a}{x-5} + \frac{x+5}{x-a} = 2$ có nghiệm $x = 10$ bằng

- A. 5. B. 10. C. 15. D. 20.

Câu 8. Giá trị của m để phương trình $\frac{6x+3}{4} - \frac{5x+3}{6} = \frac{2x-1}{3} + \frac{m}{12}$ có nghiệm là

- A. -7. B. 12. C. -12. D. 7.

Câu 9. Hình thang $ABCD$ có $AB \parallel CD$; $\widehat{A} = 3\widehat{D}$; $\widehat{B} - \widehat{C} = 30^\circ$. Khi đó tổng $\widehat{A} + \widehat{B}$ bằng

- A. 180° . B. 210° . C. 240° . D. 270° .

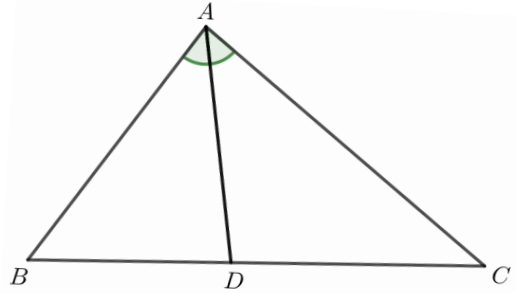
Câu 10. Cho tứ giác $ABCD$, gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của AB, BC, CD, DA . Tứ giác $EFGH$ là hình vuông khi tứ giác $ABCD$ có điều kiện là

- A. $BD \perp AC, BD = AC$. B. $BD \perp AC$.

C. $BD = AC$.

D. $AC = BD, AB \parallel CD$.

Câu 11. Cho tam giác ABC có $AB : AC = 4 : 5$ và D là chân đường phân giác trong của góc A (tham khảo hình vẽ bên). Nếu $BC = 27$ thì $BD^2 + 2.CD^2$ bằng



A. 389.

B. 369.

C. 513.

D. 594.

Câu 12. Cho ΔABC , một đường thẳng song song với BC cắt các cạnh AB và AC theo thứ tự tại D và E . Hệ thức nào sau đây là đúng?

A. $\frac{AB}{AD} + \frac{CE}{CA} = 1$.

B. $\frac{AD}{AB} + \frac{CE}{CA} = 1$.

C. $\frac{CA}{AB} + \frac{CE}{CA} = 1$.

D.

$\frac{AD}{AB} + \frac{CA}{CE} = 1$.

Câu 13. Cho hình thang $ABCD$ có đáy AB, CD , gọi M là trung điểm của cạnh bên AD . Khi đó $\frac{S_{MBC}}{S_{ABCD}}$ bằng

A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. $\frac{2}{3}$.

D. $\frac{1}{4}$.

Câu 14. Cho hình thang vuông $ABCD$ có $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ, \hat{C} = 45^\circ, AB = 2cm, CD = 4cm$. Diện tích của hình thang vuông $ABCD$ là

A. $3cm^2$.

B. $8cm^2$.

C. $4cm^2$.

D. $6cm^2$.

Câu 15. Một ca nô xuôi từ bến A đến bến B , hai bến cách nhau $18km$ hết 1 giờ 30 phút. Biết vận tốc dòng nước chảy là $2km/h$ thì vận tốc thực của ca nô (vận tốc khi dòng nước yên lặng) là

A. $12km/h$.

B. $10km/h$.

C. $8km/h$.

D. $18km/h$.

Câu 16. Lớp 8D có 34 em đi học phụ đạo ba môn: Toán, Ngữ văn, tiếng Anh. Có 12 em đi học Toán, số em đi học tiếng Anh nhiều gấp 3 lần số em đi học Ngữ văn. Trong đó có 5 em vừa đi học tiếng Anh vừa đi học Toán, 4 em vừa đi học tiếng Anh vừa đi học Ngữ văn, 3 em vừa đi học Toán vừa đi học Ngữ văn, 2 em đi học cả ba môn nói trên. Số em đi học tiếng Anh bằng

A. 24.

B. 8.

C. 16.

D. 27.

II. PHẦN TỰ LUẬN (12,0 điểm)

Câu 1: (3,0 điểm)

a) Chứng minh với mọi số nguyên n thì $A = n(n+1)(2n+1) : 6$.

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $6x^2 - 3xy + 17x - 4y + 5 = 0$.

c) Chứng minh tích của bốn số tự nhiên liên tiếp cộng với 1 luôn là một số chính phương.

Câu 2: (4,0 điểm)

a) Đa thức $f(x)$ khi chia cho $x+1$ dư 4, khi chia cho x^2+1 dư $2x+3$. Tìm phần dư khi chia $f(x)$ cho $(x+1)(x^2+1)$.

b) Cho $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$ và $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 2$. Tính giá trị của biểu thức: $P = \frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} + \frac{c^2}{z^2}$.

c) Giải phương trình: $(x-2)(x-3)(x+6)(x+9) = 140x^2$.

Câu 3: (4,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AA', BB', CC' ; H là trực tâm.

a) Tính tổng $\frac{HA'}{AA'} + \frac{HB'}{BB'} + \frac{HC'}{CC'}$.

b) Gọi AI là phân giác của $\triangle ABC$; IM, IN thứ tự là phân giác của \widehat{AIC} và \widehat{AIB} .
Chứng minh rằng: $AN \cdot BI \cdot CM = BN \cdot IC \cdot AM$.

c) Tìm điều kiện của $\triangle ABC$ để biểu thức $\frac{(AB + BC + CA)^2}{AA'^2 + BB'^2 + CC'^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 4: (1,0 điểm)

Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $4yx + 4yz + 3xz = 3xyz$.

Chứng minh rằng: $\frac{2(x+y)^2}{2x+3y} + \frac{(y+2z)^2}{2y+z} + \frac{(2z+x)^2}{z+2x} \geq 24$.

.....**Hết**.....

Họ và tên thí sinh:.....SBD:.....

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm./.

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ CHÍNH THỨC
(Hướng dẫn chấm có 06 trang)

A. PHẦN TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN: (16 câu; 8,0 điểm; mỗi câu đúng 0,5 điểm)

Câu	Đáp án	Câu	Đáp án
1	D	9	C
2	A	10	A
3	C	11	D
4	C	12	B
5	A	13	B
6	A	14	D
7	C	15	B
8	D	16	A

II. PHẦN TỰ LUẬN

Câu 1: (3,0 điểm)

- a) Chứng minh với mọi số nguyên n thì $A = n(n+1)(2n+1) : 6$.
 b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $6x^2 - 3xy + 17x - 4y + 5 = 0$.
 c) Chứng minh tích của 4 số tự nhiên liên tiếp cộng với 1 luôn là một số chính phương.

Ý	Đáp án	Điểm									
a)	Chứng minh với mọi số nguyên n thì $A = n(n+1)(2n+1) : 6$.										
a) (1,0 đ)	$A = n(n+1)(2n+1) = n(n+1)(2n-2+3)$	0,25									
	$A = 2(n-1)n(n+1) + 3n(n+1)$	0,25									
	Ta có: $\left. \begin{array}{l} 2(n-1)n(n+1) : 6 \\ 3n(n+1) : 6 \end{array} \right\} \Rightarrow A : 6$	0,25									
	Vậy với mọi số nguyên n thì $A = n(n+1)(2n+1) : 6$.	0,25									
b)	Tìm nghiệm nguyên của phương trình $6x^2 - 3xy + 17x - 4y + 5 = 0$.										
	$6x^2 - 3xy + 17x - 4y + 5 = 0$ $\Leftrightarrow 6x^2 + 8x - 3xy - 4y + 9x + 12 = 7$ $\Leftrightarrow 2x(3x+4) - y(3x+4) + 3(3x+4) = 7$ $\Leftrightarrow (3x+4)(2x-y+3) = 7$	0,25									
	Lập bảng: <table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td>$3x+4$</td> <td>7</td> <td>1</td> <td>-1</td> <td>-7</td> </tr> <tr> <td>$2x-y+3$</td> <td>1</td> <td>7</td> <td>-7</td> <td>-1</td> </tr> </table>	$3x+4$	7	1	-1	-7	$2x-y+3$	1	7	-7	-1
$3x+4$	7	1	-1	-7							
$2x-y+3$	1	7	-7	-1							

Ý	Đáp án					Điểm
b) (1,0 đ)	x	1	-1	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{11}{3}$	
	y	4	-6	$\frac{20}{3}$	$-\frac{10}{3}$	
	Vì $x, y \in Z$ nên phương trình có nghiệm $(x, y) \in \{(-1; -6), (1; 4)\}$.					0,25
	Vậy phương trình có nghiệm $(x, y) \in \{(-1; -6), (1; 4)\}$.					0,25
c) Tích của 4 số tự nhiên liên tiếp cộng với 1 luôn là một số chính phương.						
c) (1,0 đ)	Gọi 4 số tự nhiên, liên tiếp đó là: $n, n+1, n+2, n+3$ ($n \in N$).					0,25
	Ta có $n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 = n.(n+3)(n+1)(n+2) + 1$ $= (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) + 1 (*)$					0,25
	Đặt $n^2 + 3n = t$ ($t \in N$) thì $(*) = t(t+2) + 1 = t^2 + 2t + 1 = (t+1)^2$. $\Rightarrow n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2$.					0,25
	Vì $n \in N$ nên $n^2 + 3n + 1 \in N$. Vậy $n(n+1)(n+2)(n+3) + 1$ là số chính phương.					0,25

Câu 2: (4,0 điểm)

a) Đa thức $f(x)$ khi chia cho $x+1$ dư 4, khi chia cho x^2+1 dư $2x+3$. Tìm phần dư khi chia $f(x)$ cho $(x+1)(x^2+1)$.

b) Cho $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$ và $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 2$. Tính giá trị của biểu thức: $P = \frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} + \frac{c^2}{z^2}$

c) Giải phương trình: $(x-2)(x-3)(x+6)(x+9) = 140x^2$.

Ý	Đáp án	Điểm
a) Đa thức $f(x)$ khi chia cho $x+1$ dư 4, khi chia cho x^2+1 dư $2x+3$. Tìm phần dư khi chia $f(x)$ cho $(x+1)(x^2+1)$.		
a) (1,5 đ)	Ta có: $f(x)$ chia $x+1$ dư 4 $\Rightarrow f(-1) = 4$.	0,25
	Do bậc của đa thức chia là 3 nên đa thức dư có dạng $ax^2 + bx + c$.	0,25
	Theo định nghĩa phép chia còn dư, ta có : $f(x) = (x+1)(x^2+1).q(x) + ax^2 + bx + c$ $= (x+1)(x^2+1).q(x) + ax^2 + a - a + bx + c$ $= (x+1)(x^2+1).q(x) + a(x^2+1) + bx + c - a$ $= [(x+1).q(x) + a].(x^2+1) + bx + c - a$	0,25
	Mà $f(x)$ chia cho x^2+1 dư $2x+3$. Do đó, ta có:	0,5

Ý	Đáp án	Điểm
	$\begin{cases} b=2 \\ c-a=3 \\ a-b+c=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ c-a=3 \\ a+c=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ c=\frac{9}{2} \\ a=\frac{3}{2} \end{cases}$	
	Vậy đa thức dư cần tìm có dạng: $\frac{3}{2}x^2 + 2x + \frac{9}{2}$	0,25
b) Cho $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$ và $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 2$. Tính giá trị của biểu thức: $P = \frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} + \frac{c^2}{z^2}$		
b) (1,5 đ)	b) Ta có: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0 \Leftrightarrow bcx + acy + abz = 0$	0,25
	$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}\right)^2 = 4$ $\Leftrightarrow \frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} + \frac{c^2}{z^2} + 2 \cdot \left(\frac{ab}{xy} + \frac{ac}{xz} + \frac{bc}{yz}\right) = 4$	0,5
	$\Leftrightarrow \frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} + \frac{c^2}{z^2} + 2 \cdot \frac{abz + acy + bcx}{xyz} = 4$ $\Leftrightarrow \frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} + \frac{c^2}{z^2} + 2 \cdot 0 = 4$	0,5
	$\Leftrightarrow \frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} + \frac{c^2}{z^2} = 4$	
	Vậy $\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} + \frac{c^2}{z^2} = 4$	0,25
c) Giải phương trình: $(x-2)(x-3)(x+6)(x+9) = 140x^2$.		
c) (1,0 đ)	$(x-2)(x-3)(x+6)(x+9) = 140x^2 \Leftrightarrow (x^2 + x - 18)(x^2 + 3x - 18) = 140x^2 \quad (1)$ $x = 0 \text{ không là nghiệm PT(1) chia 2 vế PT(1) cho } x^2 \neq 0$ $(x^2 + 7x - 18)(x^2 + 3x - 18) = 140x^2 \Rightarrow \left(x + 7 - \frac{18}{x}\right)\left(x + 3 - \frac{18}{x}\right) = 140$	0,25
	Đặt $x - \frac{18}{x} + 5 = y, (y \in R)$ ta có phương trình : $(y-2)(y+2) = 140 \Leftrightarrow y^2 = 144 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 12 \\ y = -12 \end{cases}$	0,25
	*Với $y = 12$ ta có phương trình $x - \frac{18}{x} + 5 = 12 \Rightarrow x^2 - 7x - 18 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 2x - 18 = 0$ $\Leftrightarrow (x+2)(x-9) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 9 \end{cases}$	0,25

Ý	Đáp án	Điểm
	*Với $y = -12$ ta có phương trình $x - \frac{18}{x} + 5 = -12 \Rightarrow x^2 + 17x - 18 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + 18x - 18 = 0$ $\Leftrightarrow (x-1)(x+18) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -18 \end{cases}$ Vậy $S = \{-18; -2; 1; 9\}$	0,25

Câu 3:(4,0điểm)

Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AA', BB', CC' ; H là trực tâm.

a) Tính tổng $\frac{HA'}{AA'} + \frac{HB'}{BB'} + \frac{HC'}{CC'}$.

b) Gọi AI là phân giác của ΔABC ; IM, IN thứ tự là phân giác của \widehat{AIC} và \widehat{AIB} .
 Chứng minh rằng: $AN \cdot BI \cdot CM = BN \cdot IC \cdot AM$.

c) Tìm điều kiện của ΔABC để biểu thức $\frac{(AB + BC + CA)^2}{AA'^2 + BB'^2 + CC'^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Ý	Đáp án	Điểm
a) (1,5 đ)	$\frac{S_{HBC}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot HA' \cdot BC}{\frac{1}{2} \cdot AA' \cdot BC} = \frac{HA'}{AA'};$	0,5
	Tương tự: $\frac{S_{HAB}}{S_{ABC}} = \frac{HB'}{BB'}$; $\frac{S_{HAC}}{S_{ABC}} = \frac{HC'}{CC'}$	0,5
	$\frac{HA'}{AA'} + \frac{HB'}{BB'} + \frac{HC'}{CC'} = \frac{S_{HBC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{HAB}}{S_{ABC}} + \frac{S_{HAC}}{S_{ABC}} = 1$	0,5
	Áp dụng tính chất phân giác vào các tam giác ABC, ABI, AIC : $\frac{BI}{IC} = \frac{AB}{AC}; \frac{AN}{NB} = \frac{AI}{BI}; \frac{CM}{MA} = \frac{IC}{AI}$	0,5

Ý	Đáp án	Điểm
b) (1,5đ)	$\frac{BI}{IC} \cdot \frac{AN}{NB} \cdot \frac{CM}{MA} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AI}{BI} \cdot \frac{IC}{AI} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{IC}{BI} = 1$ $\Rightarrow BI \cdot AN \cdot CM = BN \cdot IC \cdot AM$	0,5
	$\Rightarrow BI \cdot AN \cdot CM = BN \cdot IC \cdot AM$	0,5
c) (1,0đ)	<p>Vẽ $Cx \perp CC'$. Gọi D là điểm đối xứng của A qua Cx</p> <ul style="list-style-type: none"> - Chứng minh được \widehat{BAD} vuông, $CD = AC$, $AD = 2CC'$ - Xét 3 điểm B, C, D ta có: $BD \leq BC + CD$ 	0,25
	<ul style="list-style-type: none"> - ΔBAD vuông tại A nên: $AB^2 + AD^2 = BD^2$ $\Rightarrow AB^2 + AD^2 \leq (BC + CD)^2$ $AB^2 + 4CC'^2 \leq (BC + AC)^2$ $4CC'^2 \leq (BC + AC)^2 - AB^2$ 	0,25
	<p>Tương tự: $4AA'^2 \leq (AB + AC)^2 - BC^2$</p> <p>$4BB'^2 \leq (AB + BC)^2 - AC^2$</p> <ul style="list-style-type: none"> - Chứng minh được: $4(AA'^2 + BB'^2 + CC'^2) \leq (AB + BC + AC)^2$ $\Leftrightarrow \frac{(AB + BC + CA)^2}{AA'^2 + BB'^2 + CC'^2} \geq 4$ 	0,25
	<p>Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow BC = AC, AC = AB, AB = BC$</p> <p>$\Leftrightarrow AB = AC = BC$</p> <p>$\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều</p>	0,25

Câu 4: (1,0 điểm)

Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $4yx + 4yz + 3xz = 3xyz$.

Chứng minh rằng: $\frac{2(x+y)^2}{2x+3y} + \frac{(y+2z)^2}{2y+z} + \frac{(2z+x)^2}{z+2x} \geq 24$.

Ý	Đáp án	Điểm
	<p>Trước hết áp dụng BĐT $(A+B)^2 \geq 4AB$</p> <p>Đặt $P = \frac{2(x+y)^2}{2x+3y} + \frac{(y+2z)^2}{2y+z} + \frac{(2z+x)^2}{z+2x}$.</p>	0,25
	$P \geq \frac{8xy}{2x+3y} + \frac{8yz}{2y+z} + \frac{8xz}{z+2x} = \frac{8xyz}{2xz+3yz} + \frac{8xyz}{2xy+xz} + \frac{8xyz}{yz+2xy} = Q$	0,25

4. (1,0 đ)	Áp dụng BĐT với A, B, C dương $\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} \geq \frac{9}{A+B+C}$ $Q \geq 8xyz \cdot \frac{9}{2xz + 3yz + 2xy + xz + yz + 2xy} = \frac{72xyz}{4xy + 4yz + 3xz} = \frac{72xyz}{3xyz} = 24$ $P \geq Q \geq 24$	0,25
	Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 2z \\ 4xy + 4yz + 3xz = 3xyz \\ 2xz + 3yz = 2xy + xz = yz + 2xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 5 \\ z = \frac{5}{2} \end{cases}$	0,25

-----HẾT-----

Lưu ý khi chấm bài

- Hướng dẫn chấm (HDC) dưới đây dựa vào lời giải sơ lược của một cách. Khi chấm, giám khảo cần bám sát yêu cầu trình bày lời giải đầy đủ, chi tiết, hợp logic.
- Thí sinh làm bài theo cách khác với HDC mà đúng thì tổ chấm cần thống nhất cho điểm tương ứng với thang điểm của HDC.
- Điểm bài thi là tổng điểm các bài không làm tròn số.