PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THÀNH PHỐ VINH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(*Đề thi gồm có 01 trang*)

KỲ THI KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC 2022- 2023

Môn thi: Toán lớp 8

Thời gian: ***120 phút*** *(không kể thời gian giao đề)*

Câu 1. *(4,0 điểm)*

a, Cho $3a^2+b^2=4ab$ và $3a>2b>0$. Hãy tính giá trị biểu thức $A=\dfrac{2ab}{3a^2-5ab}$

b, Cho $P=1+\dfrac{x+3}{x^2+5x+6}:(\dfrac{8x^2}{4x^3-8x^2}-\dfrac{3x}{3x^2-12}-\dfrac{1}{x+2})$

Tìm các giá trị x nguyên dương để $P<\dfrac{x-1}{2}$

Câu 2. *(3,0 điểm)*

Giải các phương trình sau:

a, $(1-x)^4+(2-x)^4=(3-2x)^4$

b, $\dfrac{x+1}{x(x+2)}+\dfrac{x+6}{x^2+12x+35}=\dfrac{x+2}{x^2+4x+3}+\dfrac{x+5}{x^2+10x+24}$

Câu 3. *(3,0 điểm)*

a, Cho các số nguyên a,b,c thoả mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng $A=(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)$ là số chính phương

b, Gọi $S(n)$ là tổng các chữ số của số nguyên dương n khi biểu diễn nó trong hệ thập phân. Biết rằng với bất kỳ số nguyên dương n ta có $0<S(n)\le n$. Tìm số nguyên dương n thỏa mãn $S(n)=n^2-2023n+7$

Câu 4. *(3,0 điểm)*

a, Tìm các hệ số a,b,c để đa thức $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ chia hết cho đa thức $x+2$ và chia cho đa thức x^2-1 thì dư 3

b, Cho a,b,c,d,e là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c+d+e=4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{(a+b+c+d)(a+b+c)(a+b)}{abcde}$

Câu 5. *(7,0 điểm)*

1, Cho tam giác ABC có ba góc nhọn $(AB<AC)$, trung tuyến AM. Kẻ BE vuông góc với AM. Trên đoạn MC lấy điểm F sao cho $M\hat{F}A=M\hat{E}C$. Gọi N,I lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng AF,EC; AF cắt CE ở O.

a, Chứng minh rằng ΔOEF đồng dạng với ΔOAC

b, Biết tỷ số $\dfrac{AM}{BC}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, tính tỷ số $\dfrac{MN}{MI}$

c, Chứng minh rằng $NB=NC$

2, Cho hình thang cân $ABCD$ $(AB//CD)$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Trên tia đối của tia DA lấy điểm E, tia EN cắt đoạn thẳng AC tại F. Chứng minh rằng MN là tia phân giác của góc EMF.

.... Hết ....

HƯỚNG DẪN CHẤM – BIỂU ĐIỂM

<table>
<tr><th>CÂU</th><th>NỘI DUNG</th><th>ĐIỂM</th></tr>
<tr><td colspan="3"><u>Câu 1</u>. (4,0 điểm)
a, Cho $3a^2+b^2=4ab$ và $3a>2b>0$. Hãy tính giá trị biểu thức $A=\dfrac{2ab}{3a^2-5ab}$
b, Cho $P=1+\dfrac{x+3}{x^2+5x+6}:(\dfrac{8x^2}{4x^3-8x^2}-\dfrac{3x}{3x^2-12}-\dfrac{1}{x+2})$
Tìm các giá trị x nguyên dương để $P<\dfrac{x-1}{2}$</td></tr>
<tr><td rowspan="6">1.a
2,0đ</td><td>$3a^2+b^2=4ab \Leftrightarrow 3a^2-4ab+b^2=0$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>$\Leftrightarrow (3a-b)(a-b)=0$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3a-b=0\\ a-b=0\end{array}\right. \ (1)$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Do $3a>2b>0 \Rightarrow 3a-b>0$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>nên $(1)\Leftrightarrow a-b=0 \Leftrightarrow a=b$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Thay vào biểu thức A ta có $A=\dfrac{2aa}{3a^2-5aa}=\dfrac{2a^2}{-2a^2}=-1$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td rowspan="8">1.b
2,0đ</td><td>ĐKXĐ: $x\neq \pm 2;-3;0$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>$P=1+\dfrac{x+3}{x^2+5x+6}:(\dfrac{8x^2}{4x^3-8x^2}-\dfrac{3x}{3x^2-12}-\dfrac{1}{x+2})$
$P=1+\dfrac{x+3}{(x+2)(x+3)}:\left[\dfrac{8x^2}{4x^2(x-2)}-\dfrac{3x}{3(x-2)(x+2)}-\dfrac{1}{x+2}\right]$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>$P=1+\dfrac{1}{(x+2)}:\left[\dfrac{2}{(x-2)}-\dfrac{x}{(x-2)(x+2)}-\dfrac{1}{x+2}\right]$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>$P=1+\dfrac{1}{(x+2)}:\dfrac{2(x+2)-x-(x-2)}{(x-2)(x+2)}$
$P=1+\dfrac{1}{(x+2)}:\dfrac{6}{(x-2)(x+2)}$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>$P=1+\dfrac{1}{(x+2)}.\dfrac{(x-2)(x+2)}{6}$
$P=1+\dfrac{x-2}{6}=\dfrac{x+4}{6}$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>$P<\dfrac{x-1}{2}\Rightarrow \dfrac{x+4}{6}<\dfrac{x-1}{2}$
$\Leftrightarrow x+4<3(x-1)$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>$\Leftrightarrow -2x<-7$
$\Leftrightarrow x>\dfrac{7}{2}$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Vậy $\left\{x\in Z \middle| x>\dfrac{7}{2}\right\}$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td colspan="3">Câu 2. (3,0 điểm) Giải các phương trình sau:
a, $(1-x)^4+(2-x)^4=(3-2x)^4$</td></tr>
</table>

	b, $\frac{x+1}{x(x+2)}+\frac{x+6}{x^2+12x+35}=\frac{x+2}{x^2+4x+3}+\frac{x+5}{x^2+10x+24}$	
2.a **1,5đ**	Đặt $1-x=a;2-x=b\Rightarrow 3-2x=a+b$	**0,25**
	Ta có $a^4+b^4=\left(a+b\right)^4\Leftrightarrow a^4+b^4=a^4+b^4+2ab\left(2a^2+3ab+2b^2\right)$ $\Leftrightarrow 2ab\left(2a^2+3ab+2b^2\right)=0$ **(1)**	**0,25**
	Do $2a^2+3ab+2b^2=\frac{1}{8}\left[\left(4a+3b\right)^2+7b^2\right]\geq 0,\forall a,b$	**0,25**
	Dấu ‘’=’’ xảy ra $\begin{cases}4a+3b=0\\b=0\end{cases}\Leftrightarrow a=b=0$	**0,25**
	Suy ra $\begin{cases}1-x=0\\2-x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\x=2\end{cases}$ (vô lí)	**0,25**
	Nên (1) $\left[\begin{array}{l}a=0\\b=0\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}1-x=0\\2-x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$ Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{1;2\right\}$	**0,25**
2.b **1,5đ**	* ĐKXĐ: $x\neq 0;-1;-2;-3;-4;-5;-6;-7$	**0,25**
	* Ta có $\frac{x+1}{x(x+2)}+\frac{x+6}{x^2+12x+35}=\frac{x+2}{x^2+4x+3}+\frac{x+5}{x^2+10x+24}$ (1) $\Leftrightarrow\frac{x+1}{x(x+2)}+\frac{x+6}{(x+5)(x+7)}=\frac{x+2}{(x+1)(x+3)}+\frac{x+5}{(x+4)(x+6)}$ $\Leftrightarrow\frac{x+1}{2}(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2})+\frac{(x+6)}{2}(\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+7})$ $=\frac{x+2}{2}(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3})+\frac{x+5}{2}(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+6})$	**0,25**
	$\Leftrightarrow 1+\frac{1}{x}-1+\frac{1}{x+2}+1+\frac{1}{x+5}-1+\frac{1}{x+7})$ $=1+\frac{1}{x+1}-1+\frac{1}{x+3}+1+\frac{1}{x+4}-1+\frac{1}{x+6}$ $\Leftrightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x+7}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+6}$ $\Leftrightarrow(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+7})+(\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+5})=(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+6})+(\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4})$ $\Leftrightarrow(2x+7)\left(\frac{1}{x^2+7x}+\frac{1}{x^2+7x+10}-\frac{1}{x^2+7x+6}-\frac{1}{x^2+7x+12}\right)=0$	**0,25**
	$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+7=0\quad(2)\\\frac{1}{x^2+7x}+\frac{1}{x^2+7x+10}-\frac{1}{x^2+7x+6}-\frac{1}{x^2+7x+12}=0\quad(3)\end{array}\right.$	**0,25**
	Đặt $t=x^2+7x$ ta có (3) $\Rightarrow\frac{1}{t}+\frac{1}{t+10}-\frac{1}{t+6}-\frac{1}{t+12}=0$ $\Rightarrow t^2+14t+60=0$	**0,25**

	$\Leftrightarrow (t+7)^2+11=0$ (Vô nghiệm) $(2) \Leftrightarrow x=\dfrac{-7}{2}$	
	Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là $S=\left\{\dfrac{-7}{2}\right\}$	**0,25**

Câu 3. (3,0 điểm)

a, Cho các số nguyên a,b,c thoả mãn $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng $A=(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)$ là số chính phương

b, Gọi $S(n)$ là tổng các chữ số của số nguyên dương n khi biểu diễn nó trong hệ thập phân. Biết rằng với bất kỳ số nguyên dương n ta có $0<S(n)\le n$. Tìm số nguyên dương n thỏa mãn $S(n)=n^2-2003n+7$

3.a **1,5đ**	$ab+bc+ca=1 \Rightarrow 1+a^2=a^2+ab+bc+ca=(a+b)(a+c)$	**0,25**
	Tương tự ta có $1+b^2=(b+c)(b+a)$	**0,25**
	$1+c^2=(c+a)(c+b)$	**0,25**
	Suy ra $A=(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)=(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2$	**0,25**
	Do $a,b,c\in Z \Rightarrow (a+b),(b+c)(c+a)\in Z$	**0,25**
	Nên $A=(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)=(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2$ là một số chính phương	**0,25**
3.b **1,5đ**	$0<S(n)\le n$ và $S(n)=n^2-2003n+7$	**0,25**
	Mặt khác: $n^2-2003n+7>0 \Rightarrow n^2-2003n+2022>0$	**0,25**
	$\Leftrightarrow (n-1)(n-2022)>0$. Mà $n\ge 2 \Rightarrow n-2022>0 \Rightarrow n>2022$ (1)	**0,25**
	Ta có: $S(n)\le n \Leftrightarrow n^2-2004n+7\le 0$	**0,25**
	$\Rightarrow n^2-2024n<0 \Leftrightarrow n(n-2024)$. Mà $n>0 \Rightarrow n-2024<0 \Leftrightarrow n<2024$ (2)	**0,25**
	Từ (1) và (2) suy ra $n=2023$	**0,25**

Câu 4. (3,0 điểm)

a, Tìm các hệ số a,b,c để đa thức $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ chia hết cho đa thức $x+2$ và chia cho đa thức x^2-1 thì dư 3

b, Cho a,b,c,d,e là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c+d+e=4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{(a+b+c+d)(a+b+c)(a+b)}{abcde}$

4.a **1,5đ**	$f(x)=x^3+ax^2+bx+c \vdots x+2 \Rightarrow f(-2)=0$	**0,25**
	$\Rightarrow (-2)^3+a(-2)^2+b(-2)+c=0$ $\Rightarrow 4a-2b+c=8$ $(x^3+ax^2+bx+c):(x^2-1)$ dư 3, ta có: $x^3+ax^2+bx+c=(x-1)(x+1)g(x)+3$ với $g(x)$ là một đa thức	**0,25**
	Tại $x=1$ ta có $a+b+c=2$ Tại $x=-1$ ta có $a-b+c=4$ Suy ra $\begin{cases} 4a-2b+c=8 & (1) \\ a+b+c=2 & (2) \\ a-b+c=4 & (3) \end{cases}$	**0,25**
	Từ (2) và (3) suy ra $2b=-2 \Rightarrow b=-1$	**0,25**

	Thay vào (1) và (2) được $\begin{cases} 4a+c=6 & (1) \\ a+c=3 & (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a=3 \\ a+c=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ c=2 \end{cases}$	**0,25**
	Vậy $a=1; b=-1; c=2$	**0,25**
4.2 **1,5đ**	Áp dụng bđt : $(x+y)^2 \geq 4xy$	**0,25**
	Áp dụng bđt : $(x+y)^2 \geq 4xy$ Ta có $(a+b+c+d+e)^2 \geq 4(a+b+c+d)e$ $(a+b+c+d)^2 \geq 4(a+b+c)d$ $(a+b+c)^2 \geq 4(a+b)c$ $(a+b)^2 \geq 4ab$	**0,25**
	Do a, b,c, d là các số dương, nhân theo vế các bđt trên ta được:	**0,25**
	Mà $a+b+c+d+e=4$ Suy ra $4^2(a+b+c+d)(a+b+c)(a+b) \geq 4^4 abcde$ Hay : $P \geq \dfrac{(a+b+c+d)(a+b+c)(a+b)}{abcde} = 16$	**0,25**
	Dấu bằng có khi: $\begin{cases} a+b+c+d=e \\ a+b+c=d \\ a+b=c \\ a=b \\ a+b+c+d+e=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=\dfrac{1}{4} \\ c=\dfrac{1}{2} \\ d=1 \\ e=2 \end{cases}$	**0,25**
	Vậy $P_{min} = 16 \Leftrightarrow a=b=\dfrac{1}{4}, c=\dfrac{1}{2}, d=1, e=2$	**0,25**

<u>Câu 5</u>. *(7,0 điểm)*

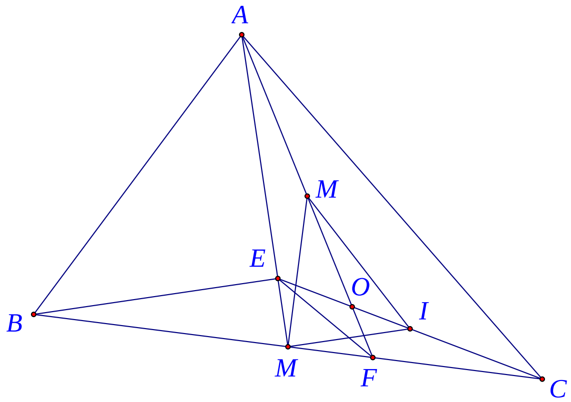
1, Cho tam giác ABC có ba góc nhọn $(AB<AC)$, trung tuyến AM. Kẻ BE vuông góc với AM. Trên đoạn MC lấy điểm F sao cho $\widehat{MFA} = \widehat{MEC}$. Gọi N, I lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng AF, EC; AF cắt CE ở O.

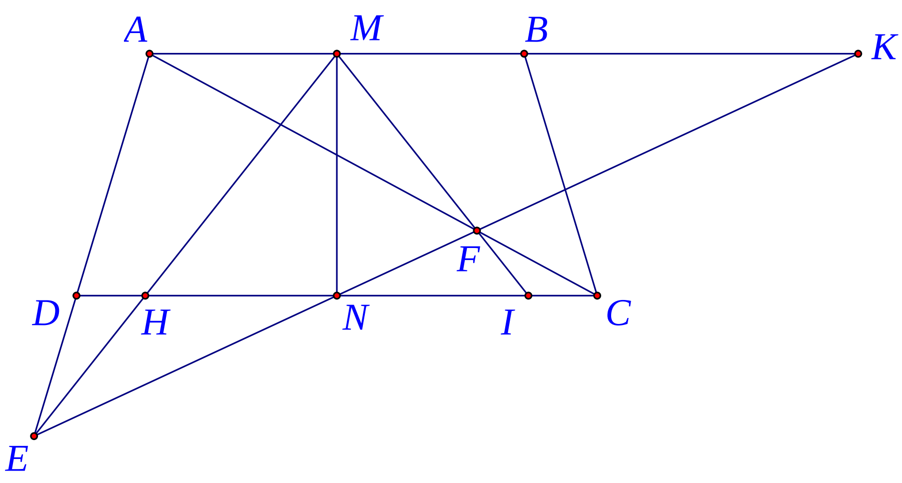
a, Chứng minh rằng ΔOEF đồng dạng với ΔOAC

b, Biết tỷ số $\dfrac{AM}{BC} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, tính tỷ số $\dfrac{MN}{MI}$

c, Chứng minh rằng $NB = NC$

2, Cho hình thang cân $ABCD$ $(AB//CD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Trên tia đối của tia DA lấy điểm E, tia EN cắt đoạn thẳng AC tại F. Chứng minh rằng MN là tia phân giác của góc EMF.

		**0,25**

5.1.a 2,0đ	Ta có $\angle MFA = \angle MEC(gt), \angle FMA = \angle EMC$	**0,25**
	$\Rightarrow \Delta MEC \sim \Delta MFA(g-g)$	**0,25**
	$\Rightarrow \angle MCE = \angle MAF$ $\Rightarrow \angle FCO = \angle EAO$	**0,25**
	Mà $\angle AOE = \angle COF$ (đối đỉnh)	**0,25**
	$\Rightarrow \Delta AOE \sim \Delta COF(g-g)$	**0,25**
	$\Rightarrow \frac{OE}{OF} = \frac{OA}{CO}$	**0,25**
	Mà $\angle AOC = \angle EOF$ (đối đỉnh)	**0,25**
	$\Rightarrow \Delta OEF \sim \Delta OAC(c-g-c)$	**0,25**
5.1.b 1,5đ	$\frac{AM}{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}}; BC = 2MC \Rightarrow \frac{AM}{MC} = \sqrt{2}$ (1)	**0,25**
	$\Delta MEC \sim \Delta MFA \Rightarrow \frac{\text{AF}}{CE} = \frac{AM}{MC} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}\text{AF}}{\frac{1}{2}CE} = \frac{AM}{MC}$	**0,25**
	$\Rightarrow \frac{\text{AN}}{CI} = \frac{AM}{MC}$	**0,25**
	Mà $\angle MAN = \angle MCI$ nên $\Delta AMN \sim \Delta CMI$ (c-g-c)	**0,25**
	$\frac{MN}{MI} = \frac{AM}{MC}$ (2)	**0,25**
	Từ (1) và (2) suy ra $\frac{MN}{MI} = \sqrt{2}$	**0,25**
5.1.c 1,5đ	M là trung điểm của BC, I là trung điểm của EC suy ra MI//BE $\Rightarrow \angle B_1 = \angle M_1$	**0,25**
	$\Delta AMN \sim \Delta CMI \Rightarrow \angle M_1 = \angle M_3$	**0,25**
	$\Delta AMN \sim \Delta CMI \Rightarrow \angle M_1 = \angle M_3$	**0,25**
	Suy ra $\Rightarrow \angle B_1 = \angle M_3$	**0,25**
	Mà $\angle B_1 + \angle M_4 = 90^0$ nên $\angle M_3 + \angle M_4 = 90^0$ Suy ra $NM \perp BC$	**0,25**
	Lại có M là trung điểm của BC nên IM là đường trung trực của BC Vậy $NB = NC$	**0,25**
5.2 2,0đ		

	EM cắt CD tại H, EN cắt AB tại K, MF cắt CD tại I	**0,5**
	$DN//AK \Rightarrow \frac{HN}{MK}=\frac{DN}{AK}(=\frac{EN}{EK})$ $NC//AK \Rightarrow \frac{NI}{MK}=\frac{NC}{AK}(=\frac{NF}{FK})$	**0,5**
	Mà $DN=NC=\frac{1}{2}CD \Rightarrow \frac{DN}{AK}=\frac{NC}{AK}$	**0,5**
	Suy ra $\frac{HN}{MK}=\frac{NI}{MK} \Rightarrow HN=NI$	**0,25**
	ΔHMI có $MN \perp HI; HN=NI$ (vì M là trung điểm AB, N là trung điểm của DC nên MN là trục đối xứng của hình thang cân) suy ra MN là tia phân giác của $\angle HMI$ Hay MN là tia phân giác của $\angle$EMF	**0,25**

(Học sinh giải các cách khác đúng vẫn đánh giá điểm tối đa)