

Câu 1 (5,0 điểm)

1) Phân tích đa thức $x^4 + 2023x^2 + 2022x + 2023$ thành nhân tử.

2) Cho biểu thức: $A = \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$.

a) Tìm x để giá trị của A được xác định. Rút gọn biểu thức A.

b) Tìm giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.

Câu 2 (4,0 điểm)

1) Cho hai đa thức $P(x) = x^4 + x^3 - x^2 + ax + b$; $Q(x) = x^2 + x - 2$. Hãy xác định giá trị a và b để $P(x)$ chia hết cho $Q(x)$.

2) Giải bất phương trình sau: $\frac{x^2 - 2x - 4}{(x+1)(x-3)} > 1$

3) Cho phương trình: $\frac{mx - 1}{x - 2} - \frac{mx + 1}{x + 1} = \frac{3}{x + 2 - x^2}$ (với x là ẩn, m là tham số). Tìm điều kiện của tham số m để phương trình có nghiệm là một số không âm.

Câu 3 (3,0 điểm)

1) Chứng minh rằng nếu số tự nhiên \overline{abc} chia hết cho 37 thì các số \overline{bca} và \overline{cab} cũng chia hết cho 37.

2) Tìm số tự nhiên m, n để $Q = 3^{3m^2 + 6n - 61} + 4$ là số nguyên tố.

3) Cho các số dương a; b; c thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a+b^2} + \frac{b}{b+c^2} + \frac{c}{c+a^2} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

Câu 4 (3,0 điểm)

Một vật thể chuyển động từ A đến B theo cách sau: đi được $4m$ thì dừng lại 1 giây, rồi đi tiếp $8m$ dừng lại 2 giây, rồi đi tiếp $12m$ dừng lại 3 giây... Cứ như vậy đi từ A đến B kể cả dừng hết tất cả 155 giây. Biết rằng khi đi vật thể luôn có vận tốc $2m$ / giây. Tính khoảng cách từ A đến B.

Câu 5 (5,0 điểm)

1. Cho hình vuông ABCD. Qua A kẻ một đường thẳng cắt đoạn thẳng BC tại P (P khác B, P khác C) và cắt tia DC tại Q. Kẻ đường thẳng vuông góc với AP tại A, đường thẳng này cắt tia CB tại R và cắt tia CD tại S. Tia SP cắt QR tại H. Gọi M; N lần lượt là trung điểm của QR và SP. Chứng minh rằng:

a) ΔAQR và ΔAPS là các tam giác vuông cân.

b) Tứ giác AMHN là hình chữ nhật.

c) MN là đường trung trực của đoạn thẳng AC.

2. Cho tam giác ABC có góc $\widehat{ABC} = 30^\circ$. Dựng bên ngoài tam giác ABC tam giác ACD vuông cân tại D. Chứng minh rằng $2BD^2 = BA^2 + BC^2 + BA \cdot BC$