

Câu 1 (2,0 điểm) Giải phương trình: $3x^3 - 7x^2 + 17x - 5 = 0$

Câu 2 (4,0 điểm)

1) Rút gọn biểu thức:
$$P = \frac{a^2}{(a+b)(1-b)} - \frac{b^2}{(a+b)(1+a)} - \frac{a^2b^2}{(1+a)(1-b)}$$

($a \neq -b, a \neq -1, b \neq 1$)

2) Cho các số thực a, b, c, x, y, z thỏa mãn $x = by + cz, y = ax + cz, z = ax + by$ và $x + y + z \neq 0$. Tính giá trị của biểu thức $Q = \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c}$

Câu 3 (4,0 điểm)

1) Trong dãy số 13597....., mỗi chữ số đứng sau bắt đầu từ chữ số thứ tư bằng chữ số hàng đơn vị của tổng ba chữ số đứng ngay trước nó. Hỏi trong dãy này có chứa dãy 789 không?

2) Có hay không số tự nhiên n để $n^2 + 2022$ là số chính phương?

Câu 4 (4,0 điểm)

a) Chứng minh $(a - b)(a^2 - b^2) \geq 0$

b) Với $a + b + c = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$M = \frac{a^3}{a^2 + b^2 + ab} + \frac{b^3}{b^2 + c^2 + bc} + \frac{c^3}{c^2 + a^2 + ca}$$

Câu 5 (6,0 điểm)

Cho hình thoi ABCD có $\widehat{BAD} = 40^\circ$, O là giao điểm hai đường chéo. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên cạnh AB. Trên tia đối của tia BC lấy điểm M, trên tia đối của tia DC lấy điểm N sao cho HM song song với AN.

a) Chứng minh $\triangle MBH$ và $\triangle ADN$ đồng dạng.

b) Chứng minh $MB \cdot DN = OB^2$.

c) Tính số đo \widehat{MON} .

-----Hết-----

(Lưu ý: Học sinh không được sử dụng máy tính cầm tay)

Họ và tên thí sinhSố báo danh.....

Chữ kí giám thị 1 Chữ kí giám thị 2.....

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI CẤP THCS MÔN TOÁN 8
Năm học 2022-2023
(Hướng dẫn chấm gồm 03 trang)

Câu	ý	Nội dung	Điểm
1 (2,0 điểm)		$3x^3 - 7x^2 + 17x - 5 = 0 \Leftrightarrow (3x - 1)(x^2 - 2x + 5) = 0$	0,5
		$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 1 = 0 & (1) \\ x^2 - 2x + 5 = 0 & (2) \end{cases}$	0,5
		(1) $\Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$	0,5
		Ta có $x^2 - 2x + 5 = (x - 1)^2 + 4 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên (2) vô nghiệm Vậy PT đã cho có một nghiệm $x = \frac{1}{3}$	0,5
2 (4,0 điểm)	1	$P = \frac{a^2(1+a) - b^2(1-b) - a^2b^2(a+b)}{(a+b)(1+a)(1-b)}$	0,5
		$= \frac{a^2 - b^2 + a^3 + b^3 - a^2b^2(a+b)}{(a+b)(1+a)(1-b)}$	0,5
		$= \frac{(a+b)(a-b+a^2-ab+b^2-a^2b^2)}{(a+b)(1+a)(1-b)}$	0,5
		$= \frac{(a+b)(1-b)[a^2(1+b)+a-b]}{(a+b)(1+a)(1-b)}$	0,5
		$= \frac{(a+b)(1-b)(1+a)(a+ab-b)}{(a+b)(1+a)(1-b)} = a + ab - b$	0,5
	2		Cộng vế theo vế các đẳng thức đã cho ta được: $x + y + z = 2(ax + by + cz)$
		Vì $x + y + z \neq 0$ nên $ax + by + cz \neq 0$	0,25
		Cộng hai vế của từng đẳng thức đã cho lần lượt với ax, by, cz ta được: $(a+1)x = ax + by + cz; (b+1)y = ax + by + cz; (c+1)z = ax + by + cz$	0,5
		Suy ra $Q = \frac{x}{ax + by + cz} + \frac{y}{ax + by + cz} + \frac{z}{ax + by + cz} = \frac{x + y + z}{ax + by + cz} = 2$	0,25
1		Dãy bắt đầu bằng chữ số lẻ. Mà tổng ba số lẻ cũng là một số lẻ (hàng đơn vị là số lẻ), nên số thứ 4 cũng là số lẻ.	1,0
		Suy ra các chữ số ở các vị trí 2, 3 và 4 là các số lẻ. Suy ra chữ số ở vị trí thứ 5 cũng là số lẻ. Cứ tiếp tục như vậy, ta suy ra các chữ số trong dãy đều là chữ số lẻ. Vậy trong dãy đã cho không chứa dãy 789.	1,0
		Giả sử $n^2 + 2022$ là số chính phương thì $n^2 + 2022 = m^2, (m \in \mathbb{N})$ Từ đó suy ra: $m^2 - n^2 = 2022$, hay $(m+n)(m-n) = 2022$ (1)	0,5

3 (4,0 điểm)		Mặt khác $(m + n) + (m - n) = 2m$ (chẵn) nên hai số $(m + n)$, $(m - n)$ cùng tính chẵn lẻ (2)	0,5
	2	Từ (1) và (2) suy ra $(m + n)$, $(m - n)$ là hai số chẵn	0,5
		$\Rightarrow (m + n)(m - n) : 4$, nhưng 2022 lạo không chia hết cho 4. Do đó, không tồn tại số tự nhiên n để $n^2 + 2022$ là số chính phương	0,5
4 (4,0 điểm)	a	$(a - b)(a^2 - b^2) = (a - b)(a - b)(a + b)$	1,5
		$= (a + b)(a - b)^2 \geq 0, \forall a, b > 0$ (*)	1,0
		Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b$	
	b	$(*) \Leftrightarrow a^3 \geq a^2b + ab^2 - b^3 \Leftrightarrow 3a^3 \geq (2a - b)(a^2 + b^2 + ab)$ $\Leftrightarrow \frac{a^3}{a^2 + b^2 + ab} \geq \frac{2a - b}{3}$ (1)	0,5
		Tương tự: $\frac{b^3}{b^2 + c^2 + bc} \geq \frac{2b - c}{3}$ (2) và $\frac{c^3}{c^2 + a^2 + ca} \geq \frac{2c - a}{3}$ (3)	0,25
		Từ (1), (2), (3) ta có: $M \geq 1$	0,5
M đạt giá trị nhỏ nhất bằng 1, khi $a = b = c = 1$		0,25	
5 (6,0 điểm)			
	a	Ta có: $\widehat{DAN} = \widehat{BMH}, \widehat{MBH} = \widehat{ADN}$ (góc có các cặp cạnh tương ứng song song)	1,5
		Suy ra $\triangle MBH \sim \triangle ADN$ (g-g)	1,0
	b	Từ $\triangle MBH \sim \triangle ADN$ ta có: $\frac{MB}{AD} = \frac{BH}{DN} \Leftrightarrow MB \cdot DN = BH \cdot AD$ (1)	0,5
		Ta cũng có $\triangle OHB \sim \triangle AOD$, suy ra $\frac{BH}{OD} = \frac{OB}{AD} \Leftrightarrow OB \cdot OD = BH \cdot AD$ (2)	1,0

	Từ (1) và (2) suy ra: $MB \cdot DN = OB \cdot OD \Leftrightarrow MB \cdot DN = OB^2$	1,0
c	Từ kết quả câu b): $MB \cdot DN = OB \cdot OD \Leftrightarrow \frac{MB}{OB} = \frac{OD}{DN}$ Ta cũng có $\widehat{MBO} = 180^\circ - \widehat{CBD} = 180^\circ - \widehat{CDB} = \widehat{ODN}$	0,5
	Nên $\triangle MBO \sim \triangle ODN \Rightarrow \widehat{OMB} = \widehat{NOD}$	0,25
	Do đó $\widehat{MON} = 180^\circ - (\widehat{MOB} + \widehat{NOD}) = 180^\circ - (\widehat{MOB} + \widehat{OMB})$ $= 180^\circ - \widehat{OBC} = 110^\circ$	0,25

- Học sinh làm theo cách khác đúng vẫn được tính điểm tối đa