SỞ GD-ĐT BẮC NINH
TRƯỜNG THPT YÊN PHONG SỐ 2

(Đề thi gồm 01 trang)

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TRƯỜNG
NĂM HỌC 2023-2024
Môn: Toán 11
Ngày thi: 06/01/2024 - Thời gian làm bài: 150 phút

Câu 1 (*4,0 điểm*). Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = -3n + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

***a*)** Chứng minh rằng (u_n) là một cấp số cộng.

***b*)** Với mỗi số nguyên dương n ta đặt $v_n = 2024^{u_n}$. Chứng minh rằng dãy số (v_n) là một cấp số nhân lùi vô hạn và tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn đó.

Câu 2 (*4,0 điểm*).

***a*)** Tìm nghiệm âm lớn nhất của phương trình $\tan\left(3x - \dfrac{\pi}{7}\right) = \sqrt{2} - 1$.

***b*)** Biết rằng phương trình $a.\sin x + b.\cos x = c$ có nghiệm khi và chỉ khi $a^2 + b^2 \geq c^2$. Vận dụng tính chất đó, hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = \frac{1 - \sin x + 2\cos x}{3 + \sin x - \cos x}.$$

Câu 3 (*4,0 điểm*).

***a*)** Tìm m để hàm số sau đây liên tục tại điểm $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{3}{x^3 - 1} & \text{khi } x > 1, \\ \left|x^2 + m\right| & \text{khi } x \leq 1. \end{cases}$$

***b*)** Tính giới hạn $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + 16x}.\sqrt[3]{1 - 27x} - 1}{x}$.

Câu 4 (*2,0 điểm*). Chọn ngẫu nhiên một số nguyên dương có 5 chữ số. Tính xác suất để chọn được số mà hai chữ số kề nhau luôn khác nhau.

Câu 5 (*2,0 điểm*). Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol $(P) : y = x^2 - 2x$ và đường tròn $(T) : x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$. Tính diện tích của đa giác lồi có các đỉnh là các điểm chung của (P) và (T).

Câu 6 (*4,0 điểm*). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M là trung điểm của SC, G là trọng tâm tam giác ABC, K là giao điểm của đường thẳng SD và mặt phẳng (AGM).

***a*)** Chứng minh đường thẳng OM song song với mặt phẳng (SAD).

***b*)** Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng MG và song song với đường thẳng SB. Hãy xác định giao điểm Q của đường thẳng BC với mặt phẳng (P).

***c*)** Tính tỉ số $\dfrac{KS}{KD}$.

HẾT

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.............................Số báo danh:.............................

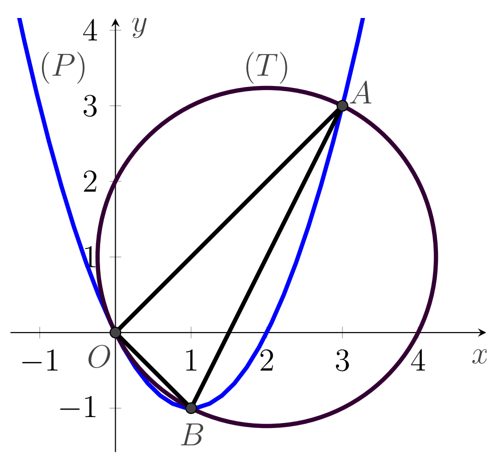
SỞ GD-ĐT BẮC NINH
TRƯỜNG THPT YÊN PHONG SỐ 2

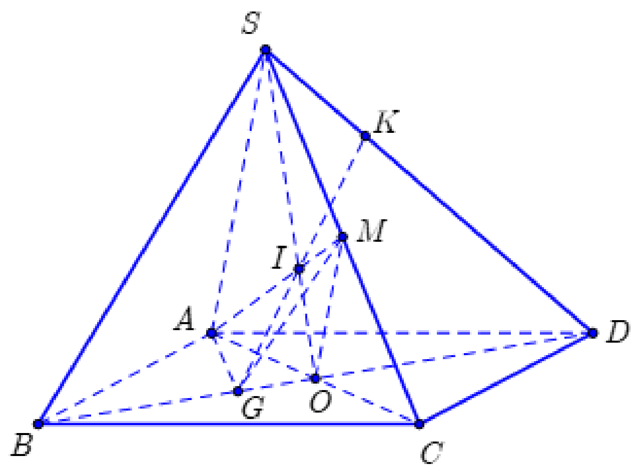
THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TRƯỜNG
NĂM HỌC 2023-2024
Môn: Toán 11
Ngày thi: 06/01/2024 - Thời gian làm bài: 150 phút

ĐÁP ÁN - HƯỚNG DẪN CHẤM

(*Gồm 03 trang*)

Câu	Nội dung	Điểm
1 (4,0)	a) Ta có $u_n = -3n+1$, $u_{n+1} = -3n-2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$	1,0
	$\Rightarrow u_{n+1} - u_n = -3$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy (u_n) là một cấp số cộng với công sai $d = -3$.	1,0
	b) Nhận thấy $v_n = 2024.\left(\dfrac{1}{2024^3}\right)^n$, $v_{n+1} = 2024.\left(\dfrac{1}{2024^3}\right)^{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Do đó $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{1}{2024^3} \in (-1;1)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy (v_n) là một cấp số nhân lùi vô hạn với công bội $q = \dfrac{1}{2024^3}$, $v_1 = \dfrac{1}{2024^2}$.	1,0
	Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn (v_n) là $S = \dfrac{v_1}{1-q} = \dfrac{2024}{2024^3 - 1}$.	1,0
2 (4,0)	a) $\tan\left(3x - \dfrac{\pi}{7}\right) = \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow \tan\left(3x - \dfrac{\pi}{7}\right) = \tan\dfrac{\pi}{8} \Leftrightarrow x = \dfrac{5\pi}{56} + \dfrac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.	1,0
	Ta có $\dfrac{5\pi}{56} + \dfrac{k\pi}{3} < 0 \Leftrightarrow k < -\dfrac{15}{56}$. Mà $k \in \mathbb{Z}$ nên $k = -1, -2, -3, -4, \ldots$. Vậy nghiệm âm lớn nhất của phương trình đã cho (ứng với $k = -1$) là $x = -\dfrac{41\pi}{168}$.	1,0
	b) Phương trình $\sin x - \cos x = -3$ vô nghiệm vì $1^2 + (-1)^2 < (-3)^2$. Dẫn tới $3 + \sin x - \cos x \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R}$. Ta có $y = \dfrac{1 - \sin x + 2\cos x}{3 + \sin x - \cos x} \Leftrightarrow (-y-1)\sin x + (y+2)\cos x = 3y - 1.$	1,0
	Coi phương trình trên là phương trình ẩn x, với y là tham số. Phương trình này có nghiệm khi và chỉ khi $(-y-1)^2 + (y+2)^2 \geq (3y-1)^2 \Leftrightarrow 7y^2 - 12y - 4 \leq 0$ $\Leftrightarrow -\dfrac{2}{7} \leq y \leq 2$. Chứng tỏ hàm số đã cho có miền giá trị là đoạn $\left[-\dfrac{2}{7}; 2\right]$. Vậy $\max y = 2$ và $\min y = -\dfrac{2}{7}$.	1,0
3 (4,0)	a) Ta có $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{3}{x^3-1}\right) = \lim\limits_{x \to 1^+} \left(\dfrac{x+2}{x^2+x+1}\right) = 1$.	1,0
	Đồng thời $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lvert m+1 \rvert = f(1)$. Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x = 1$ khi và chỉ khi $\lvert m+1 \rvert = 1$ hay $m = 0$ hoặc $m = -2$.	1,0

	b) Ta xét giới hạn $L=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}$ với các hằng số $a\neq0$, $n\in\mathbb{N}, n\geq2$. Đặt $t=\sqrt[n]{1+ax}$ thì $ax=t^n-1$, $x\to0$ khi và chỉ khi $t\to1$. Lúc này $L=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}=\lim\limits_{t\to1}\dfrac{a(t-1)}{t^n-1}=\lim\limits_{t\to1}\dfrac{a}{t^{n-1}+...+t+1}=\dfrac{a}{n}$. Cụ thể, ta có $$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+16x}-1}{x}=\frac{16}{2}=8,\ \lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1-27x}-1}{x}=\frac{-27}{2}=-9.$$	1,0
	Như vậy $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+16x}.\sqrt[3]{1-27x}-1}{x}$ $=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sqrt{1+16x}-1}{x}.\sqrt[3]{1-27x}+\dfrac{\sqrt[3]{1-27x}-1}{x}\right)=8.1-9=-1.$	1,0
4 (2,0)	Xét số nguyên dương có 5 chữ số có dạng $\overline{abcxy}$, ở đó các chữ số a,b,c,x,y tùy ý, $a\neq0$. Có tất cả 9.10^4 số như vậy, vì chữ số a có 9 cách chọn, mỗi chữ số còn lại có 10 cách chọn. Do đó $n(\Omega)=9.10^4$.	0,75
	Xét số nguyên dương có 5 chữ số có dạng $\overline{abcxy}$, ở đó các chữ số a,b,c,x,y thỏa mãn $a\neq0$, $a\neq b$, $b\neq c$, $c\neq x$, $x\neq y$. - Vì $a\in\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ nên a có 9 cách chọn. - Vì $b\in\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}\setminus\{a\}$ nên b có 9 cách chọn. - Vì $c\in\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}\setminus\{b\}$ nên c có 9 cách chọn. - Tương tự, x có 9 cách chọn và y cũng có 9 cách chọn. Như thế, có tất cả 9^5 số nguyên dương có 5 chữ số mà hai chữ số kề nhau luôn khác nhau. Gọi A là biến cố cần tính xác suất thì $n(A)=9^5$. Vậy $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{9^5}{9.10^4}=\left(\dfrac{9}{10}\right)^4=0,6561.$	1,25
5 (2,0)	Thế $y=x^2-2x$ vào phương trình $x^2+y^2-4x-2y=0$ ta được $x^2+(x^2-2x)^2-4x-2(x^2-2x)=0$ $\Leftrightarrow x^2(x^2-4x+3)=0\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=3$ hoặc $x=1$. Vậy (P) và (T) có ba điểm chung là $O(0;0)$, $A(3;3)$, $B(1;-1)$.	1,0
		
	Ta tính được $OA=3\sqrt{2}$, $OB=\sqrt{2}$, $AB=2\sqrt{5}$.	0,5

	Kí hiệu $p = \frac{1}{2}(OA + OB + AB) = \sqrt{5} + 2\sqrt{2}$. Tam giác OAB có diện tích là $S = \sqrt{p.(p - OA).(p - OB).(p - AB)} = 3$ (đơn vị diện tích). ***Lưu ý***: Vì $OA^2 + OB^2 = AB^2$ nên tam giác OAB vuông tại O. Do đó có thể tích diện tích tam giác OAB như sau $$S = \frac{1}{2}.OA.OB = 3 \text{ (đơn vị diện tích).}$$	0,5
6 (4,0)	a) Vì $OM // SA$ nên $OM // (SAD)$.	1,0
	b) Gọi $I = AM \cap SO$. Trong mặt phẳng (SBD), kéo dài GI cắt SD tại $K \Rightarrow K = SD \cap (AMG)$. Tam giác SAC có SO, AM là hai đường trung tuyến, nên I là trọng tâm tam giác đó $\Rightarrow \frac{OI}{OS} = \frac{1}{3} = \frac{OG}{OB} \Rightarrow GI \ // \ SB \Rightarrow GK \ // \ SB$.	0,75
	Do đó mặt phẳng (P) chính là mặt phẳng (GMK). Để ý rằng $I \in GK \subset (GMK)\,, A \in IM \subset (GMK)\,.$ Vậy giao điểm của BC với (P) chính là giao điểm của BC với AG, và là trung điểm Q của BC.	0,75
		
	c) Vì $GK \ // \ SB$ nên $\frac{KD}{KS} = \frac{GD}{GB}$. Ta có $DO = BO = 3GO \Rightarrow GD = 4GO$, $GB = 2GO$. Vậy $\frac{KD}{KS} = \frac{GD}{GB} = \frac{4GO}{2GO} = 2 \Rightarrow \frac{KS}{KD} = \frac{1}{2}$.	1,5

——————— HẾT ———————