SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG THPT LƯƠNG NGỌC QUYẾN

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TRƯỜNG
NĂM HỌC 2023-2024
MÔN TOÁN 11
(Thời gian làm bài: 150 phút)

Câu 1. (6 điểm) Giải các phương trình sau

a. $\sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x - 2\cos x = 0$;

b. $\dfrac{\cos 2x}{1+\tan x} + \dfrac{1}{2}\left(\sin 2x + \sin x - 1\right) = 0$.

Câu 2. (**2 điểm**) Biết $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+ax+1}+bx\right) = -1$. Tính giá trị biểu thức $P = a^2 - 3b^3$.

Câu 3. (4 điểm) Cho tập hợp $S = \{1;2;3;...;39;40\}$ gồm 40 số tự nhiên từ 1 đến 40. Lấy ngẫu nhiên ba số thuộc tập S. Tính xác suất để ba số lấy được lập thành cấp số cộng.

Câu 4. (3 điểm) Dãy số (u_n) được cho như sau: $\begin{cases} u_1 = \dfrac{3}{2} \\ (n+3)u_{n+1} = 3nu_n \end{cases}, n \in N^*$

Tìm công thức số hạng tổng quát của dãy số trên.

Câu 5. (5 điểm) Cho tứ diện $ABCD$

1) Gọi E, F, G lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC, ACD, ABD.

a) Chứng minh $(EFG)//(BCD)$.

b) Tính diện tích tam giác EFG theo diện tích tam giác BCD.

2) Gọi M là điểm thuộc miền trong của tam giác BCD. Kẻ qua M đường thẳng $d//AB$.

a) Xác định giao điểm B' của đường thẳng d và mặt phẳng (ACD).

b) Kẻ qua M các đường thẳng lần lượt song song với AC và AD cắt các mặt phẳng (ABD) và (ABC) theo thứ tự tại C', D'. Chứng minh rằng $\dfrac{MB'}{AB} + \dfrac{MC'}{AC} + \dfrac{MD'}{AD} = 1$.

-----------------------**Hết**-----------------------

(Thí sinh không được sử dụng tài liệu)

Họ và tên thí sinh: ……………………………………Số báo danh……………………

SỞ GD&ĐT THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG THPT LƯƠNG NGỌC QUYẾN

HƯỚNG DẪN CHẤM THI HSG

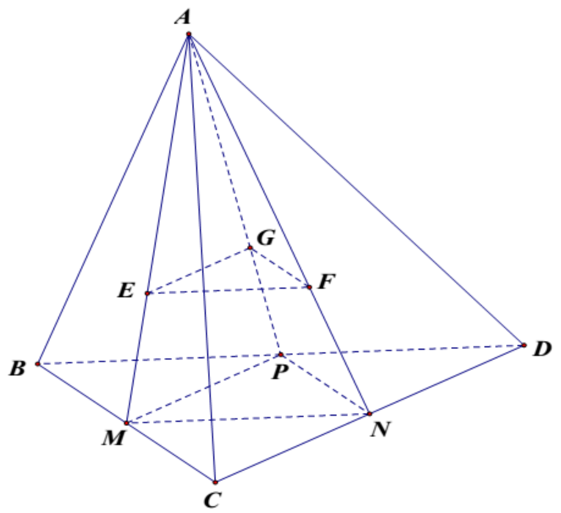
MÔN: TOÁN 11

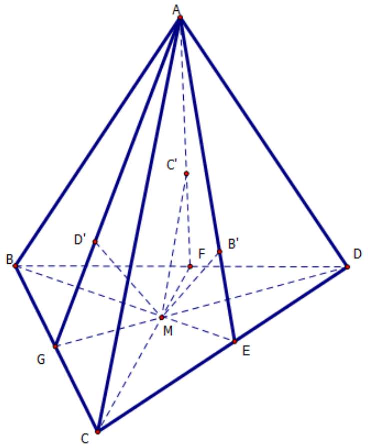
NĂM HỌC 2023-2024

Câu	Nội dung	Điểm
1	Giải các phương trình sau a. $\sqrt{3}\cos 2x-\sin 2x-2\cos x=0$; b. $\dfrac{\cos 2x}{1+\tan x}+\dfrac{1}{2}\left(\sin 2x+\sin x-1\right)=0$.	
	a. $\sqrt{3}\cos 2x-\sin 2x-2\cos x=0$ $\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 2x-\sin 2x=2\cos x\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x-\dfrac{1}{2}\sin 2x=\cos x$	1,5
	$\Leftrightarrow \cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos x\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x+\dfrac{\pi}{6}=x+k2\pi\\2x+\dfrac{\pi}{6}=-x+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\x=-\dfrac{\pi}{18}+k\dfrac{2\pi}{3}\end{array}\right.,k\in\mathbb{Z}$ Vậy PT có nghiệm là $x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi;x=-\dfrac{\pi}{18}+k\dfrac{2\pi}{3}\left(k\in\mathbb{Z}\right)$	1,5
	b. ĐK: $\begin{cases}\cos x\ne 0\\\tan x\ne -1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\x\ne-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{cases},k\in\mathbb{Z}$	0,5
	$\dfrac{\cos 2x}{1+\tan x}+\dfrac{1}{2}\left(\sin 2x+\sin x-1\right)=0\Leftrightarrow\dfrac{2\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)\cos x}{\cos x+\sin x}+\sin 2x+\sin x-1=0$	1,0
	$\Leftrightarrow 2\cos^2 x-2\sin x\cos x+2\sin x\cos x+\sin x-1=0$ $\Leftrightarrow 2\cos^2 x+\sin x-1=0\Leftrightarrow -2\sin^2 x+\sin x+1=0$	0,5

	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=1\\ \sin x=-\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\\ x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}\\ x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.$	0,5
	Kết hợp với điều kiện, PT có nghiệm là $x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi; x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi, k\in\mathbb{Z}$	0,5
2	Biết $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+ax+1}+bx\right)=-1$. Tính giá trị biểu thức $P=a^2-3b^3$.	
	TH1: $b=2$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+ax+1}+bx\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+ax+1}+2x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{ax+1}{\sqrt{4x^2+ax+1}-2x}$	0,5
	$=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{a+\frac{1}{x}}{-\sqrt{4+a\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-2}=-\frac{a}{4}=-1\Rightarrow a=4$	0,5
	$\Rightarrow P=4^2-3.2^3=-8$	0,5
	TH2: $b\neq 2$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+ax+1}+bx\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\left(-\sqrt{4+\frac{a}{x}+\frac{1}{x^2}}+b\right)\right]=\begin{cases}+\infty, b<2\\ -\infty, b>2\end{cases}$ (không thỏa mãn đầu bài $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+ax+1}+bx\right)=-1$)	0,5
3	Cho tập hợp $S=\{1;2;3;...;39;40\}$ gồm 40 số tự nhiên từ 1 đến 40. Lấy ngẫu nhiên ba số thuộc tập S. Tính xác suất để ba số lấy được lập thành cấp số cộng.	
	Ta có $n(\Omega)=C_{40}^3$	0,5

	Gọi A là biến cố: “Ba số lấy được lập thành cấp số cộng” Giả sử ba số a, b, c theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng, khi đó ta có a + c = 2b . Hay a + c là một số chẵn và mỗi cách chọn 2 số a và c thỏa mãn a + c là số chẵn sẽ có duy nhất cách chọn b . Số cách chọn hai số có tổng chẵn sẽ là số cách chọn ba số tạo thành cấp số cộng.	2,0
	TH1: Hai số a, b lấy được đều là chẵn có C_{20}^{2} cách lấy TH2: Hai số a, b lấy được đều là lẻ có C_{20}^{2} cách lấy	1,0
	Suy ra $n\left(A\right)=C_{20}^{2}+C_{20}^{2}\Rightarrow p\left(A\right)=\dfrac{C_{20}^{2}+C_{20}^{2}}{C_{40}^{3}}=\dfrac{1}{26}$.	0,5
4	Dãy số $\left(u_n\right)$ được cho như sau: $\begin{cases}u_1=\dfrac{3}{2}\\ \left(n+3\right)u_{n+1}=3nu_n\end{cases},n\in N^*$ Tìm công thức số hạng tổng quát của dãy số trên. Ta có $\left(n+3\right)u_{n+1}=3nu_n\Leftrightarrow\left(n+3\right)\left(n+2\right)\left(n+1\right)u_{n+1}=\left(n+2\right)\left(n+1\right)nu_n$	1,0
	Đặt $v_n=\left(n+2\right)\left(n+1\right)nu_n$ ta được dãy $\left(v_n\right)$ xác định bởi $\begin{cases}v_1=9\\ v_{n+1}=3v_n\end{cases},n\in N^*$	0,5
	Đây là cấp số nhân có công bội $q=3$. Suy ra $v_n=9.3^{n-1}=3^{n+1}$	0,5
	Do đó $u_n=\dfrac{v_n}{\left(n+2\right)\left(n+1\right)n}=\dfrac{3^{n+1}}{\left(n+2\right)\left(n+1\right)n}$	1,0
	Cho tứ diện $ABCD$ 1) Gọi E,F,G lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC,ACD,ABD. a) Chứng minh $\left(EFG\right)//\left(BCD\right)$. b) Tính diện tích tam giác EFG theo diện tích tam giác BCD. 2) Gọi M là điểm thuộc miền trong của tam giác BCD. Kẻ qua M đường thẳng $d//AB$. a) Xác định giao điểm B' của đường thẳng d và mặt phẳng $\left(ACD\right)$. b) Kẻ qua M các đường thẳng lần lượt song song với AC và AD cắt các mặt phẳng $\left(ABD\right)$ và $\left(ABC\right)$ theo thứ tự tại C',D'. Chứng minh rằng $\dfrac{MB'}{AB}+\dfrac{MC'}{AC}+\dfrac{MD'}{AD}=1$.	

	1)  a) Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của BC,CD,DB. Theo tính chất trọng tâm ta có $\frac{AE}{AM}=\frac{AF}{AN}=\frac{2}{3}\Rightarrow EF//MN$. Ta có $MN\subset\left(BCD\right)$ nên $EF//\left(BCD\right)$. (1) Chứng minh tương tự ta có $EG//\left(BCD\right)$. (2) Từ (1) và (2) ta có $\begin{cases}EF,EG\subset\left(EFG\right)\\EF//\left(BCD\right),EG//\left(BCD\right)\end{cases}\Rightarrow\left(EFG\right)//\left(BCD\right)$.	2đ
	b) Ta có $\frac{EF}{MN}=\frac{FG}{NP}=\frac{EG}{MP}=\frac{2}{3}$ theo định lý Talet. $\Rightarrow\Delta EFG\sim\Delta MNP$ theo tỉ số $\frac{2}{3}$ $\Rightarrow\frac{S_{\Delta EFG}}{S_{\Delta MNP}}=\frac{4}{9}$ (3) (Do tỉ số diện tích của hai tam giác đồng dạng bằng bình phương tỉ số đồng dạng) Mặt khác $\Delta MNP\sim\Delta DBC$ theo tỉ số $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow\frac{S_{\Delta MNP}}{S_{\Delta DBC}}=\frac{1}{4}$. (4) Từ (3) và (4) ta có $\frac{S_{\Delta EFG}}{S_{\Delta DBC}}=\frac{1}{9}\Rightarrow S_{\Delta EFG}=\frac{1}{9}S_{\Delta BDC}$. 2)	1đ

		
	a) Trong mặt phẳng (BCD) gọi $BM \cap CD = \{E\}$. Trong mặt phẳng (ABE) kẻ $MB'//AB\,(B' \in AE) \Rightarrow d \equiv MB'$. Ta có $\begin{cases} B' \in d \\ B' \in AE \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow d \cap (ACD) = \{B'\}$ b) Trong mặt phẳng (BCD) gọi $CM \cap BD = \{F\}, DM \cap BC = \{G\}$. Trong mặt phẳng (ACF) kẻ $MC'//AC\,(C' \in AF)$. Trong mặt phẳng (ADG) kẻ $MD'//AD\,(D' \in AG)$. Ta có $MB'//AB \Rightarrow \dfrac{MB'}{AB} = \dfrac{ME}{BE} = \dfrac{S_{\Delta MCD}}{S_{\Delta BCD}}$ (1). Tương tự ta có $\dfrac{MC'}{AC} = \dfrac{S_{\Delta MBD}}{S_{\Delta BCD}}$ (2); $\dfrac{MD'}{AD} = \dfrac{S_{\Delta MBC}}{S_{\Delta BCD}}$ (3). Từ (1), (2) và (3) Suy ra $\dfrac{MB'}{AB} + \dfrac{MC'}{AC} + \dfrac{MD'}{AD} = \dfrac{S_{\Delta MCD} + S_{\Delta MBD} + S_{\Delta MBC}}{S_{\Delta BCD}} = 1$	0,5đ 1,5đ