TRƯỜNG THPT THỊ XÃ QUẢNG TRỊ

ĐỀ CHÍNH THỨC

Đề có 01 trang

KỲ THI HỌC SINH GIỎI VĂN HÓA LỚP 11 THPT

Khóa ngày 11 tháng 4 năm 2023

Môn thi: TOÁN

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian giao đề

Câu I.(*5,0 điểm*) **1.** Tìm m để hàm số sau liên tục tại $x=2$:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+6}}{x-2} & khi \quad x\neq 2\\ m+1 & khi \quad x=2\end{cases}$$

2. Giải phương trình: $2\sin^2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=2\sin^2 x-\tan x$

Câu II. (*7,0 điểm*)

1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân với $AD//BC,\ AB=BC=a,\ AD=2a.$ Tam giác SAD vuông cân tại S và $SB=a\sqrt{3}.$

a) Gọi M là trung điểm của SA, chứng minh rằng $BM//(SCD)$.

b) Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng BM và $CD.$

c) Gọi G là trọng tâm của tam giác SCD, H là giao điểm của đường thẳng BG và mặt phẳng (SAC). Tính tỉ số $\dfrac{HB}{HG}$.

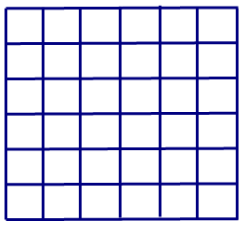
2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$. Trên tia đối của tia CD lấy điểm E sao cho $CD=CE$, điểm N là hình chiếu vuông góc của D lên đường thẳng BE.

a) Chứng minh $AN\perp CN$

b) Tìm tọa độ điểm D biết $A(-3;1),\ N(6;-2)$ và điểm C thuộc đường thẳng $\Delta: x-2y-5=0.$

Câu III. (*4,0 điểm*) **1.** Giải hệ phương trình sau trên tập số thực $\begin{cases}(4x^2+1)x+(y-3)\sqrt{5-2y}=0\\ 4x^2+y^2+2\sqrt{3-4x}=7\end{cases}.$

2. Cho bảng hình vuông (6x6) gồm 36 hình vuông đơn vị, mỗi hình có diện tích bằng 1. Hỏi có bao nhiêu hình chữ nhật tạo thành từ các hình vuông đơn vị của bảng. Chọn ngẫu nhiên một hình chữ nhật trên, tính xác suất để hình chữ nhật chọn được có diện tích là số chẵn.



Câu IV. (*4,0 điểm*) **1.** Cho dãy (u_n) xác định bởi $\begin{cases}u_1=1,\ u_2=2\\ u_{n+1}=1+u_1.u_2...u_{n-1}+(u_1.u_2...u_{n-1})^2,\ \ \forall n\geq 2.\end{cases}$

a) Chứng minh rằng $u_{n+1}=1+u_1.u_2...u_n,\ \forall n\geq 1.$

b) Tính $\lim\left(\dfrac{1}{u_1}+\dfrac{1}{u_2}+...+\dfrac{1}{u_n}\right)$

2. a)Tìm số đo các góc của tam giác ABC sao cho biểu thức $P=\sin^2 A+\cos B+\cos^2 C$ đạt giá trị lớn nhất

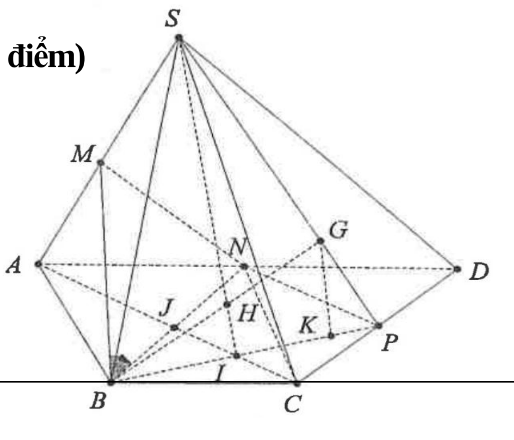
b) Cho a,b,c là các số thực không âm và không đồng thời bằng 0 thay đổi thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2+c^2\leq 6b.$ Chứng minh rằng $\dfrac{1}{(a+b+c)^2}+\dfrac{8}{(b+11)^2}+\dfrac{1}{(c+6)^2}\geq\dfrac{1}{16}.$

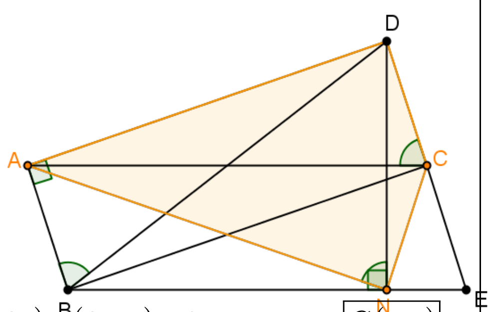
--------------------**HẾT**--------------------

Thí sinh không được sử dụng tài liệu và MTCT (đối với môn Toán).

Họ và tên thí sinh:………………………………….**Số báo danh:**……………….

HƯỚNG DẪN CHẤM HSG 11-NĂM HỌC 2022-2023

CÂU	NỘI DUNG	ĐIỂM
Câu I **(5,0 điểm)**	**1. (3 điểm).** TXĐ $D=\left[-2;+\infty\right)$, $x=2\in D$ và $f\left(2\right)=m+2$. Ta có $\lim\limits_{x\to 2} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+6}}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2+2-\sqrt[3]{x+6}}{x-2}=$ $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}+\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-\sqrt[3]{x+6}}{x-2}$. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+2}=\dfrac{1}{4}$ và $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-\sqrt[3]{x+6}}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-1}{4+2\sqrt[3]{x+6}+\left(\sqrt[3]{x+6}\right)^2}=-\dfrac{1}{12}$. Suy ra $\lim\limits_{x\to 2} f\left(x\right)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{6}$. Hàm số $f\left(x\right)$ liên tục tại $x=2\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2} f\left(x\right)=f\left(2\right)\Leftrightarrow m+2=\dfrac{1}{6}\Leftrightarrow m=-\dfrac{11}{6}$.	0,5 0,5 0,5 0,5 1,0
	2. (2,0 điểm). $2\sin^2\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=2\sin^2 x-\tan x \quad (1)$ Điều kiện $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$ Pt(1) $\Leftrightarrow 1-\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{2}\right)=2\sin^2 x-\dfrac{\sin x}{\cos x}\Leftrightarrow 1-\sin 2x=\dfrac{\sin x\left(\sin 2x-1\right)}{\cos x}$ $\Leftrightarrow\left(\sin 2x-1\right)(\sin x+\cos x)=0\Leftrightarrow\left(\sin 2x-1\right).\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=0$ $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin 2x=1\\ \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.\quad\left(k\in\mathbb{Z}\right)$. Đối chiếu điều kiện ta có nghiệm phương trình là $\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.\quad\left(k\in\mathbb{Z}\right)$	0,5 0,5 0,5 0,5
Câu II **(7,0 điểm)**	**1. (4 điểm)** 	

	a) Gọi M là trung điểm của SA, chứng minh rằng $BM//(SCD)$. Gọi N là trung điểm của AD, ta có $BC = DN = a$ và $BC//DN \Rightarrow$ $BCDN$ là hình bình hành $\Rightarrow BN//CD$.	1,0
	Vì M, N lần lượt là trung điểm của SA và AD nên $MN//SD$ $\Rightarrow (BMN)//(SCD)$ mà $BM \subset (BMN) \Rightarrow BM//(SCD)$.	1,0
	b) Tính góc giữa hai đường thẳng BM và CD. Do $BN//CD$ $\Rightarrow \widehat{(BM,CD)} = \widehat{(BN.BM)}$. Vì tam giác SAD vuông cân tại S có cạnh huyền $AD = 2a$ nên $SA = SD = a\sqrt{2}$	0,5
	ΔSAB có $SA^2 + AB^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2 = SB^2 \Rightarrow \Delta SAB$ vuông tại A. Ta có $BM = \sqrt{AM^2 + AB^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} + a^2} = a\sqrt{\frac{3}{2}}$ và $BN = CD = a$; $MN = \frac{1}{2}SD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ Áp dụng định lí côsin trong tam giác BMN ta được : $$\cos\widehat{MBN} = \frac{BM^2 + BN^2 - MN^2}{2.BM.BN} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$	0,5
	c) Gọi G là trọng tâm của tam giác SCD, H là giao điểm của BG và mp(SAC). Tính tỉ số $\frac{HB}{HG}$. Gọi P là trung điểm của CD, $I = AC \cap BP$; $H = SI \cap BG$ $\Rightarrow$ H=BG$\cap$(SAC). Gọi J là giao điểm của BN và AC, vì $BCNA$ là hình bình hành nên J là trung điểm của BN, mà $IJ//NP$ nên I là trung điểm của BP.	0,5
	Trong tam giác SBP vẽ $GK//SI$, ta có: $\frac{HB}{HG} = \frac{IB}{IK} = \frac{IP}{IK} = \frac{SP}{SG} = \frac{3}{2}$ (do G là trọng tâm của tam giác SCD).	0,5
	2. (3,0 điểm) a) Tứ giác ADBN nội tiếp $\Rightarrow AND = ABD$ và $ABD = ACD$ (do ABCD là hình chữ nhật).	0,5
	b) Suy ra $AND = ACD$ hay tứ giác ANCD nội tiếp được một đường tròn, mà $ADC = 90^0 \Rightarrow ANC = 90^0 \Rightarrow AN \perp CN$.	0,5+0,5
	 c) Giả sử $C(2c+5;c)$, từ $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{CN} = 0 \Rightarrow$ $3(1-2c)+(2+c) = 0 \Rightarrow c = 1 \Rightarrow \boxed{C(7;1)}$	0,5
	Tứ giác ABEC là hình bình hành, suy ra $AC//BE$. Đường thẳng NE qua N và song song với AC nên có phương trình $y+2=0$.	0,5
	Giả sử $B(b;-2)$, ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB} = 0 \Rightarrow b^2 - 4b - 12 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b = 6 \to B \equiv N(loai) \\ b = -2 \to \boxed{B(-2;-2)} \end{array}\right.$	0,5

	Từ đó dễ dàng suy ra $\boxed{D(6;4)}$	
Câu III (4,0 điểm)	**1.(1,5 điểm).** Giải hệ phương trình $\begin{cases}(4x^2+1)x+(y-3)\sqrt{5-2y}=0 & (1)\\ 4x^2+y^2+2\sqrt{3-4x}=7 & (2)\end{cases}$ 1) Điều kiện $\begin{cases}x\le \dfrac{3}{4}\\ y\le \dfrac{5}{2}\end{cases}$. $(1)\Leftrightarrow (2x)^3+2x=\left(\sqrt{5-2y}\right)^3+\sqrt{5-2y}$ $\Leftrightarrow \left(2x-\sqrt{5-2y}\right)\left((2x)^2+2x\sqrt{5-2y}+\left(\sqrt{5-2y}\right)^2+1\right)=0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-\sqrt{5-2y}=0\\ (2x)^2+2x\sqrt{5-2y}+\left(\sqrt{5-2y}\right)^2+1=0\end{array}\right.$	**0,5**
	Voi $(2x)^2+2x\sqrt{5-2y}+\left(\sqrt{5-2y}\right)^2+1=0$ $\Leftrightarrow \left[\left(2x+\frac{1}{2}\sqrt{5-2y}\right)^2+\frac{3}{4}\left(\sqrt{5-2y}\right)^2\right]+1=0$ vô nghiệm +) Với $2x-\sqrt{5-2y}=0\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 0\\ y=\dfrac{5-4x^2}{2}\end{cases}$. Thay vào (2) ta có $16x^4-24x^2-3+8\sqrt{3-4x}=0$ $\Leftrightarrow 4x^2(4x^2-1)-5(4x^2-1)+8\left(\sqrt{3-4x}-1\right)=0$ $\Leftrightarrow (2x-1)\left(8x^3+4x^2-10x-5-\dfrac{16}{\sqrt{3-4x}+1}\right)=0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x-1=0\\ 8x^3+4x^2-10x-5-\dfrac{16}{\sqrt{3-4x}+1}=0\ (*)\end{array}\right.$	**0,5**
	Ta có $2x-1=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}\Rightarrow y=2.$ Ta có $(*)\Leftrightarrow 2x^2(4x-3)+3x(4x-3)-2x^2-x-5-\dfrac{16}{\sqrt{3-4x}+1}=0$ Với $0\le x\le \dfrac{3}{4}$ ta có $2x^2(4x-3)+3x(4x-3)-2x^2-x-5-\dfrac{16}{\sqrt{3-4x}+1}<0$ Vậy (*) không có nghiệm thỏa mãn $0\le x\le \dfrac{3}{4}$ Kết luận hệ có nghiệm là $(x;y)=\left(\dfrac{1}{2};2\right)$	**0,5**
	2. (2,5 điểm) Mỗi hình chữ nhật tương ứng với việc chọn 2 đường nằm ngang và 2 đường nằm dọc của hình vuông đã cho. Chọn 2 đường nằm ngang có C_7^2, chọn 2 đường nằm dọc có C_7^2. Vậy số hình chữ nhật là $C_7^2.C_7^2=441$. Đánh số đường nằm dọc lần lượt từ trái qua phải là 1,2,3,4,5,6,7 (gồm 4 đường	**0,5**

	đánh số lẻ và 3 đường đánh số chẵn) Đánh số đường nằm ngang lần lượt từ trên xuống dưới là 1,2,3,4,5,6,7 (gồm 4 đường đánh số lẻ và 3 đường đánh số chẵn) Ta đếm số hình chữ nhật có diện tích là số lẻ: Để có một hình chữ nhật có diện tích là số lẻ thì mỗi kích thước hình chữ nhật đó phải là số lẻ. -Xét kích thước thứ nhất: Để tạo ra kích thước là số lẻ, ta chọn lần lượt 1 đường đánh số lẻ (4 đường) ghép với 1 đường đánh số chẵn (3 đường). Như vậy có 4.3 =12 (cách) -Xét kích thước thứ hai: Để tạo ra kích thước là số lẻ, ta chọn lần lượt 1 đường đánh số lẻ (4 đường) ghép với 1 đường đánh số chẵn (3 đường). Như vậy có 4.3 =12 (cách) Do đó số hình chữ nhật có diện tích là số lẻ là: 12.12 =144 (hình) Do đó, số hình chữ nhật có diện tích là số chẵn là: 441-144= 297 (hình) Vậy xác suất cần tìm là $\frac{297}{441}=\frac{33}{49}$.	**0,5** **0,5** **0,5** **0,5**
Câu IV (4, 0 điểm)	**1. (2 điểm)** a) Ta có $a_{n+1}=1+a_1a_2\ldots a_{n-1}\left(1+a_1a_2\ldots a_{n-1}\right)$ nên bằng quy nạp, ta chứng minh được $a_{n+1}=1+a_1a_2\ldots a_n,\forall n\ge 1.$ b) Do đó $a_{n+1}+a_n=1+a_n+a_1a_2\ldots a_n=1+a_n^2$ với mọi $n\ge 2.$ Từ đó ta có biến đổi $a_{n+1}-1=a_n\left(a_n-1\right)\Leftrightarrow\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_n-1}-\frac{1}{a_{n+1}-1},\forall n\ge 2.$ Đặt $b_n=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n},\ \forall n\ge 1.$ Suy ra $b_n=1+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{a_k-1}-\frac{1}{a_{k+1}-1}\right)=1+\frac{1}{a_2-1}-\frac{1}{a_{n+1}-1}=2-\frac{1}{a_{n+1}-1}.$ Dễ thấy $a_n>1,\forall n\ge 2$. Theo trên $a_{n+1}+a_n=1+a_n^2\Rightarrow a_{n+1}-a_n=\left(a_n-1\right)^2>0$, suy ra dãy $\left(a_n\right)$ tăng. Giả sử dãy $\left(a_n\right)$ bị chặn trên thì nó sẽ hội tụ về $L\left(L>1\right)$. Ta có $a_{n+1}\ge 1+a_{n-1}+a_{n-1}^2$ với mọi $n\ge 2$. Chuyển qua giới hạn, ta có $L\ge 1+L+L^2$ hay $1+L^2\le 0,$ vô lý. Suy ra dãy $\left(a_n\right)$ không bị chặn trên. Do đó $\lim a_n=+\infty.$ Do đó $\lim b_n=2$	**0,5** **0,5** **0,5** **0,5**
	2. (2 điểm) a) $P=\sin^2 A+\cos B+\cos^2 C=\frac{1-\cos 2A}{2}+\frac{1+\cos 2C}{2}+\cos B$ $=1+\sin B\sin\left(A-C\right)+\cos B\le 1+\sin B+\cos B=1+\sqrt{2}\cos\left(B-\frac{\pi}{4}\right)\le 1+\sqrt{2}$ Vậy $P_{\max}=1+\sqrt{2}$ đạt được khi	**0,5**

	$\begin{cases}\sin(A-C)=1\\ \cos\left(B-\dfrac{\pi}{4}\right)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A-C=\dfrac{\pi}{2}\\ B=\dfrac{\pi}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=\dfrac{5\pi}{8}\\ B=\dfrac{\pi}{4}\\ C=\dfrac{\pi}{8}\end{cases}$	**0,5**
	Vậy $A=\dfrac{5\pi}{8},\ B=\dfrac{\pi}{4}, C=\dfrac{\pi}{8}$.	
	b) Với x, y là hai số thực dương ta có $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}\ge\dfrac{2}{xy}\ge\dfrac{8}{(x+y)^2}$	
	Áp dụng BĐT trên ta có: $\dfrac{1}{(a+b+c)^2}+\dfrac{1}{(c+6)^2}\ge\dfrac{8}{(a+b+2c+6)^2}$	
	Suy ra $P\ge8\left(\dfrac{1}{(a+b+2c+6)^2}+\dfrac{1}{(b+11)^2}\right)\ge\dfrac{64}{(a+2b+2c+17)^2}$	**0,5**
	Mặt khác theo bất đẳng thức AM-GM ta có $2a+10b+4c\le(a^2+1)+(b^2+25)+(c^2+4)\le6b+30$	
	Suy ra $2a+4b+4c\le30\Leftrightarrow a+2b+2c\le15$.	
	Do đó, $P\ge\dfrac{64}{(15+17)^2}=\dfrac{1}{16}$. Đẳng thức xảy ra khi $a=1, b=5, c=2$.	**0,5**