TRƯỜNG THPT QUÁCH VĂN PHẨM

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ TUYỂN CHỌN HỌC SINH GIỎI
MÔN TOÁN
THỜI GIAN 180 PHÚT

*****Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay.***

Câu 1 (2 điểm). Cho tập $A = \{x \in \mathbb{R}, x^2 - mx - 4 = 0\}, B = \{x \in \mathbb{R}, 3x^2 - (m+5)x - 5m - 1 = 0\}$, với m là tham số. Tìm m để $A \cap B \neq \emptyset$.

Câu 2 (4 điểm): Giải phương trình

a) $(x^2 - 4x - 21)(\sqrt{x^2 - 16} - 2x) = 0$.

b) $\sin^4 x + \cos^4 x = \cos 2x$.

Câu 3 (3 điểm). Cho đa giác $(\mathcal{H})$ có n đỉnh nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R, trong đó có đỉnh A và K sao cho $AK = 2R$, các dây cung còn lại đều nhỏ hơn đường kính. Gọi S là tập hợp các tam giác có ba đỉnh là ba đỉnh của đa giác $(\mathcal{H})$. Chọn một tam giác trong S, tìm n để xác suất chọn được tam giác không vuông là $\frac{25}{28}$.

Câu 4 (2 điểm). Tìm hệ số của số hạng chứa x^4 trong khai triển $(x^2 + 2x + 4)^{10}$.

Câu 5 (2 điểm). Cho dãy số $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 - n \end{cases}$

a) Tìm số hạng tổng quát của dãy.

b) Gọi $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$. Tính $\lim \dfrac{S_n}{2^n . n^2}$.

Câu 6 (2 điểm). Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng $d: y = mx + 4m - 5$, với m là tham số. Gọi $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ là giao điểm của (P) và d. Gọi $S = y_1 + y_2 + 3x_1.x_2$. Tìm m để S nhỏ nhất.

Câu 7 (1,5 điểm). Cho ΔABC vuông tại A có $AC = 2AB = 4\sqrt{5}$. Gọi D là điểm thuộc cạnh BC sao cho $CD = 4$.

a) Tính góc $\widehat{ADC}$.

b) Gọi B' là điểm đối xứng của B qua A. Tính độ dài đoạn $B'D$.

Câu 8 (1,5 điểm). Cho ΔABC nội tiếp đường tròn tâm O, có H là trực tâm ΔABC. Gọi M, I lần lượt là trung điểm BC và AC.

a) Chứng minh rằng $\boldsymbol{AH = 2OM}$.

b) Khi ΔABC vuông tại A. Qua I vẽ đường thẳng d_1 vuông góc với BC, qua C vẽ đường thẳng d_2 vuông góc với AC, d_1 và d_2 cắt nhau tại E. Chứng minh rằng $\boldsymbol{BI \perp AE}$.

Hết