TRƯỜNG THPT THỊ XÃ QUẢNG TRỊ	KỲ THI HỌC SINH GIỎI VĂN HÓA LỚP 10 THPT
ĐỀ CHÍNH THỨC *Đề có 01 trang*	**Khóa ngày 11 tháng 4 năm 2023** **Môn thi: TOÁN** *Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề*

Câu 1 ***(6,0 điểm)***:

a. Tìm tập xác định của hàm số $y = x + 10 + \dfrac{11}{\sqrt{9 + 8x - x^2}}$

b. Cho parabol $(P): y = 2x^2 + 6x - 1$. Tìm giá trị của k để đường thẳng $\Delta: y = (k+6)x + 1$ cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt M, N sao cho trung điểm của đoạn thẳng MN nằm trên trục Oy.

Câu 2 ***(4,0 điểm)***:

a. Giải phương trình $2x^2 + 2x - 3 + 3\sqrt{x^2 + x + 1} = 0$.

b. Cho tam thức bậc hai $f(x) = 2023x^2 + bx + c$, chứng minh rằng nếu $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì $-(8092 + c) \leq 2b \leq 8092 + c$.

Câu 3 ***(4,0 điểm)***: Trong một cuộc thi pha chế, mỗi đội chơi được sử dụng tối đa $12gam$ hương liệu, 9 lít nước và $315gam$ đường để pha chế hai loại nước A và B. Để pha chế 1 lít nước A cần $45gam$ đường, 1 lít nước và $0,5gam$ hương liệu; để pha chế 1 lít nước B cần $15gam$ đường, 1 lít nước và $2gam$ hương liệu. Mỗi lít nước A nhận 60 điểm thưởng, mỗi lít nước B nhận 80 điểm thưởng. Hỏi cần pha chế bao nhiêu lít nước mỗi loại để đội chơi được số điểm thưởng là lớn nhất?

Câu 4 ***(2,0 điểm)***: Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC cân tại $A(-1;3)$. Gọi D là điểm trên cạnh AB sao cho $AB = 3AD$ và H là hình chiếu vuông góc của B trên CD. Điểm $M\left(\dfrac{1}{2}; -\dfrac{3}{2}\right)$ là trung điểm HC. Xác định tọa độ đỉnh C, biết đỉnh B nằm trên đường thẳng có phương trình $x + y + 7 = 0$.

Câu 5 ***(2,0 điểm)***: Cho tam giác ABC đều có cạnh bằng 15. Lấy các điểm M, N, P lần lượt trên các cạnh BC, CA, AB sao cho $BM = 5, CN = 10, AP = 4$. Chứng minh rằng $AM \perp PN$.

Câu 6 ***(2,0 điểm)***: Một sa mạc có dạng hình chữ nhật $ABCD$ có $DC = 25km$, $CB = 20km$ và P, Q lần lượt là trung điểm của AD, BC. Một người cưỡi ngựa xuất phát từ A đi đến C bằng cách đi thẳng từ A đến một điểm X thuộc đoạn PQ rồi lại đi thẳng từ X đến C. Vận tốc của ngựa khi đi trên phần $ABQP$ là $15km/h$, vận tốc của ngựa khi đi trên phần $PQCD$ là $30km/h$. Tìm vị trí của X để thời gian ngựa di chuyển từ A đến C là ít nhất?

---------**HẾT**---------

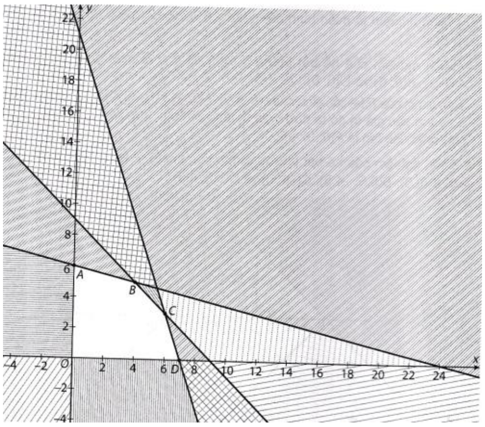
(Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay)

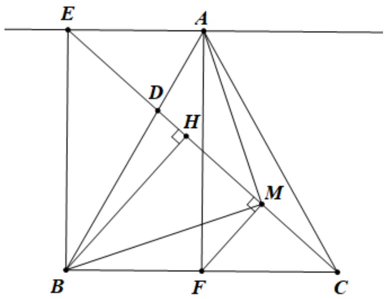
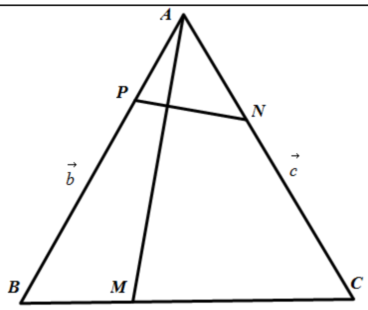
ĐÁP ÁN VÀ BIỂU ĐIỂM

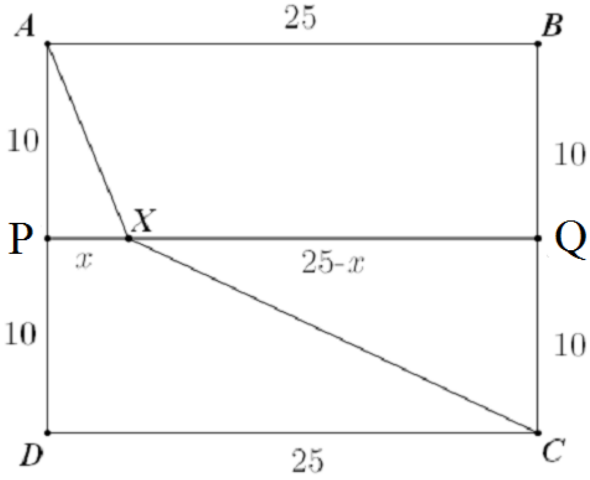
ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI VĂN HÓA LỚP 10 NĂM HỌC 2022 – 2023

MÔN TOÁN 10

Câu	**Nội dung**	**Điểm**
1a)	Tìm tập xác định của hàm số $y=x+10+\frac{11}{\sqrt{9+8x-x^2}}$	**3.0**
	Ta có hàm số xác định khi $9+8x-x^2>0\Leftrightarrow -1<0<9$	2.0
	Vậy $D=(-1;9)$	1.0
1b)	Cho parabol $(P): y=2x^2+6x-1$. Tìm giá trị của k để đường thẳng $\Delta: y=(k+6)x+1$ cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt M,N sao cho trung điểm của đoạn thẳng MN nằm trên trục Oy.	**3.0**
	Phương trình hoành độ giao điểm: $x(k+6)+1=2x^2+6x-1\Leftrightarrow 2x^2-kx-2=0(*)$ Δ cắt (P) tại hai điểm phân biệt M,N khi (*) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow k^2+16>0;\forall k\in\mathbb{R}$	1.0
	Gọi I là trung điểm MN ta có $I\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{(k+6)(x_2+x_1)+2}{2}\right)$ ($x_1;x_2$ là 2 nghiệm của (*) và $x_1+x_2=\frac{k}{2}$) $I\in Oy\Rightarrow \frac{x_1+x_2}{2}=0\Leftrightarrow k=0$ $\Leftrightarrow k=0$ (thỏa mãn)	0,5 0,5 0,5 0,5
2 a)	Giải phương trình $2x^2+2x-3+3\sqrt{x^2+x+1}=0$.	**2.0**
	Vì $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\ge\frac{3}{4}, \forall x\in\mathbb{R}$ nên phương trình luôn xác định với mọi x. Ta có: $2x^2+2x-3+3\sqrt{x^2+x+1}=0\Leftrightarrow 2x^2+2x+2-2-3+3\sqrt{x^2+x+1}=0$ $\Leftrightarrow 2(x^2+x+1)+3\sqrt{x^2+x+1}-5=0$ $(*)$. Đặt $t=\sqrt{x^2+x+1}$ với $t\ge\frac{\sqrt{3}}{2}$. Lúc đó phương trình $(*)$ trở thành: $2t^2+3t-5=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-\frac{5}{2}(\text{KTM}) \end{array}\right.$. Với $t=1$ suy ra $\sqrt{x^2+x+1}=1\Leftrightarrow x^2+x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=0 \end{array}\right.$. Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{-1;0\}$.	0.5 0.5 0.5 0.5
2 b)	Cho tam thức bậc hai $f(x)=2023x^2+bx+c$, chứng minh rằng nếu	**2.0**

	$f(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì $-(8092+c) \leq 2b \leq 8092+c$.	
	$f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} c \geq 0 \\ b^2 - 8092c \leq 0, (*) \end{cases}$ $(*) \Leftrightarrow 4b^2 \leq 32368c \leq (8092+c)^2 \Leftrightarrow -(8092+c) \leq 2b \leq 8092+c$.	0.5 1.5
3	Trong một cuộc thi pha chế, mỗi đội chơi được sử dụng tối đa 12*gam* hương liệu, 9 lít nước và 315*gam* đường để pha chế hai loại nước A và B. Để pha chế 1 lít nước A cần 45*gam* đường, 1 lít nước và 0,5*gam* hương liệu; để pha chế 1 lít nước B cần 15*gam* đường, 1 lít nước và 2*gam* hương liệu. Mỗi lít nước A nhận 60 điểm thưởng, mỗi lít nước B nhận 80 điểm thưởng. Hỏi cần pha chế bao nhiêu lít nước mỗi loại để đội chơi được số điểm thưởng là lớn nhất?	**4.0**
	Gọi x và y lần lượt là số lít nước loại A và B cần pha chế. Khi đó, theo đề bài ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x+y \leq 9 \\ 45x+15y \leq 315 \\ 0,5x+2y \leq 12 \end{cases}$ Số điểm thưởng đội chơi nhận được là: F(x;y) = 60x + 80y (điểm). Ta cần tìm GTLN của F(x;y) với (x; y) thỏa mãn hệ trên. Miền nghiệm của hệ là miền ngũ giác OABCD với A(0;6); B(4; 5); C(6; 3); D(7; 0) và O(0; 0)  Tính giá trị của F tại các đỉnh của đa giác ta có: F(0;6) = 480; F(4;5) = 640; F(6; 3) = 600; F(7; 0) = 420 và F(0; 0) = 0. So sánh các giá trị ta có giá trị lớn nhất của F là F(4; 5) = 640. Vậy cần pha chế 4 lít nước loại A và 5 lít nước loại B để số điểm thưởng có được là lớn nhất.	1.0 1.0 1.0 1.0
4	Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC cân tại $A(-1;3)$. Gọi D là điểm trên cạnh AB sao cho $AB = 3AD$ và H là hình chiếu vuông góc của B trên CD. Điểm $M\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$ là trung điểm HC. Xác định tọa độ đỉnh C, biết đỉnh B nằm trên đường thẳng có phương trình	**2.0**

	$x+y+7=0$.	
		
	Gọi F là trung điểm của BC. Gọi E là giao điểm của CD với đường thẳng qua A và song song với BC $\Rightarrow AEBF$ là hình chữ nhật $\Rightarrow AEBF$ nội tiếp đường tròn (T) có đường kính là AB và EF. Ta có MF là đường trung bình của tam giác $BHC \Rightarrow MF$ song song với $BH \Rightarrow EMF = 90^0 \Rightarrow E, M, F$ nằm trên đường tròn đường kính $EF \Rightarrow A, E, B, F, M$ nằm trên đường tròn $(T) \Rightarrow AMB = 90^0 \Rightarrow AM \perp BM$. Vì $B \in (d): x+y+7=0 \Rightarrow B(b;-7-b)$. Vì $AM \perp BM \Rightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=0 \Rightarrow b=-4 \Rightarrow B(-4;-3)$. Do D nằm trên cạnh AB và $AB=3AD \Rightarrow \overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AD} \Rightarrow D(-2;1)$. $\Rightarrow$ Phương trình đường thẳng CD là: $x+y+1=0 \Rightarrow C(c;-1-c)$. Do $AB=AC \Rightarrow (c+1)^2+(-4-c)^2=45 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} c=-7 \\ c=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} C(-7;6),(\text{loai}) \\ C(2;-3),(\text{t/ m}) \end{array}\right.$.	0.5 0.5 0.5 0.5
5	Cho tam giác ABC đều có cạnh bằng 15. Lấy các điểm M, N, P lần lượt trên các cạnh BC, CA, AB sao cho $BM=5, CN=10, AP=4$. Chứng minh rằng $AM \perp PN$.	**2.0**
		
	Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{b}, \overrightarrow{AC}=\vec{c}.$ Khi đó $\overrightarrow{BC}=\vec{c}-\vec{b}$ và $\vec{b}.\vec{c}=\left\|\vec{b}\right\|.\left\|\vec{c}\right\|.\cos 60^0=\frac{225}{2}$. Ta có $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\vec{b}+\frac{1}{3}(\vec{c}-\vec{b})=\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{2}{3}\vec{b}.$ $\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\vec{c}-\frac{4}{15}\vec{b}.$ Khi đó $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{PN}=\left(\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{2}{3}\vec{b}\right).\left(\frac{1}{3}\vec{c}-\frac{4}{15}\vec{b}\right)=\frac{1}{9}\vec{c}^2-\frac{8}{45}\vec{b}^2+\frac{2}{15}\vec{b}.\vec{c}=\left(\frac{1}{9}-\frac{8}{45}+\frac{1}{15}\right).225=0.$ Suy ra $AM \perp PN.$	0.5 0.5 0.5 0.5
6	Một sa mạc có dạng hình chữ nhật $ABCD$ có $DC=25km$, $CB=20km$ và P, Q lần lượt là trung điểm của AD, BC. Một người cưỡi ngựa xuất	**2.0**

<table>
<tr><td></td><td>phát từ A đi đến C bằng cách đi thẳng từ A đến một điểm X thuộc đoạn PQ rồi lại đi thẳng từ X đến C. Vận tốc của ngựa khi đi trên phần $ABQP$ là $15km/h$, vận tốc của ngựa khi đi trên phần $PQCD$ là $30km/h$. Tìm vị trí của X để thời gian ngựa di chuyển từ A đến C là ít nhất?</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Đặt $\mathbf{XP} = x$ (km) thì $0 \le x \le 25$ và $\mathbf{XQ} = 25 - x$.
Thời gian đi từ A đến C của kỵ binh là (đơn vị: giờ)
$$T = \frac{\sqrt{x^2 + 10^2}}{15} + \frac{\sqrt{(25-x)^2 + 10^2}}{30}$$</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td></td><td>Ta có
$$T = \frac{\sqrt{4x^2 + 20^2} + \sqrt{10^2 + (25-x)^2}}{30}$$</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td></td><td>Trong Oxy, xét $\vec{u}(2x;20)$ và $\vec{v}(10;25-x)$, ta có $|\vec{u}| + |\vec{v}| \ge |\vec{u} + \vec{v}|$ nên
$$T \ge \frac{\sqrt{(2x+10)^2 + (20+25-x)^2}}{30}$$</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td></td><td>$$= \frac{\sqrt{5x^2 - 50x + 2125}}{30} = \frac{\sqrt{5(x-5)^2 + 2000}}{30} \ge \frac{2}{3}\sqrt{5}.$$ (giờ).
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} 2x(25-x) = 200, x > 0 \\ x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5.$
Vậy vị trí cần tìm của điểm X là $\mathbf{XP} = 5\,\text{km}$, $\mathbf{XQ} = 20\text{km}$</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td></td><td>Hết</td><td></td></tr>
</table>