

Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Bài 1 (4,0 điểm). Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + 2\sqrt{(x-2y)(y+1)} = 5y + 3 \\ y^2 - 2x + 7 + \sqrt{x-2y} = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$

Bài 2 (4,0 điểm).

a. Tìm tất cả các giá trị có thể có của biểu thức $P = x^4 + y^4 + z^4$, trong đó x, y, z là các số thực thỏa mãn $x^2 - yz = y^2 - zx = z^2 - xy = 2$.

b. Cho Ω là tập hợp các bộ bốn số thực (a, b, c, d) thỏa mãn

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2(a + b + c + d).$$

Tìm tất cả các số thực x sao cho $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) \geq 0$ với mọi bộ (a, b, c, d) thuộc Ω .

Bài 3 (4,0 điểm). Cho bộ ba số (x, y, p) , trong đó x, y là các số nguyên dương và p là số nguyên tố. Xét phương trình: $x^5 + x^4 + 1 = p^y$.

a. Với $p = 2$, chứng minh rằng không tồn tại x, y nguyên dương thỏa mãn phương trình trên.

b. Tìm tất cả các bộ ba số (x, y, p) thỏa mãn phương trình trên.

Bài 4 (6,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC ($AB \leq AC$) nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I) . Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Đường thẳng qua D vuông góc với EF cắt EF tại điểm X và cắt đường tròn (I) tại K ($K \neq D$).

a. Chứng minh rằng $\frac{XE}{XF} = \frac{AC + BC - AB}{AB + BC - AC}$.

b. Đường thẳng AK cắt (O) tại điểm L ($L \neq A$). Các tia KI, IL cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC lần lượt tại N, M ($N \neq I, M \neq I$). Đường tròn ngoại tiếp các tam giác KFB, KEC cắt đường thẳng EF lần lượt tại P, Q ($P \neq F, Q \neq E$). Chứng minh rằng các điểm N, C, P thẳng hàng.

c. Chứng minh rằng tứ giác $MNPQ$ nội tiếp một đường tròn.

Bài 5 (2,0 điểm). Cho tập hợp $S = \{1; 2; 3; \dots; 2022\}$. Một tập con A của S được gọi là tập con “**Tốt**” của tập S nếu trong A có ba số phân biệt x, y, z thỏa mãn tính chất: tồn tại ba số a, b, c phân biệt trong S sao cho $x = b + c, y = c + a, z = a + b$. Số tự nhiên n ($1 \leq n \leq 2022$) được gọi là số “**Đẹp**” của tập S nếu mọi tập con có n phần tử của tập S đều là tập con “**Tốt**” của tập S .

a. Chứng minh rằng $n = 1012$ không phải là số “**Đẹp**” của tập S .

b. Tìm số “**Đẹp**” nhỏ nhất của tập S .

----- **Hết** -----

Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: Số báo danh: