UBND TỈNH HẢI DƯƠNG
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2022-2023
Môn thi: Toán
Thời gian làm bài: 180 phút, không tính thời gian phát đề
Ngày thi: 10 tháng 04 năm 2023
Đề thi có 01 trang

Câu 1. (2,0 điểm)

1) Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-2mx+3m-2}}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

2) Một chiếc cổng hình parabol có chiều cao $8m$ và khoảng cách giữa hai chân cổng là $12m$ như hình vẽ. Giả sử một chiếc xe tải có chiều ngang $4m$ và chiều cao là $7m$ đi vào vị trí chính giữa cổng. Hỏi xe tải có đi qua cổng được không?

Câu 2. (2,0 điểm)

1) Giải phương trình: $x^2-2x-3=\sqrt{x+3}$.

2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2xy-\sqrt{x+3}+2=0 \\ (x-1)^2=2x(\sqrt{y^2+1}-1) \end{cases}$

Câu 3. (2,0 điểm)

1) Một công ty cần thuê xe để chở 120 người và 6,5 tấn hàng. Nơi thuê xe có hai loại xe A và B , trong đó loại xe A có 9 chiếc và loại xe B có 8 chiếc. Một chiếc xe loại A cho thuê với giá 4 triệu đồng, một chiếc xe loại B cho thuê với giá 3 triệu đồng. Biết rằng mỗi chiếc xe loại A có thể chở tối đa 20 người và 0,5 tấn hàng, mỗi chiếc xe loại B có thể chở tối đa 10 người và 2 tấn hàng. Hỏi phải thuê bao nhiêu xe mỗi loại để chi phí bỏ ra là thấp nhất?

2) Từ các chữ số $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ lập được bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau sao cho trong đó luôn có ba chữ số $1,2,3$ và tồn tại ba chữ số có tổng bằng 8?

Câu 4. (3,0 điểm)

1) Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh là $BC=a, CA=b, AB=c$; góc $A=60^0$ và $\dfrac{b-c}{a+c}=2(\cos B-1)$. Tính số đo các góc B và C.

2) Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $C(3;4)$, đường thẳng đi qua trung điểm các cạnh CA và CB có phương trình $2x-4y+5=0$. Đường cao kẻ từ A của tam giác ABC có phương trình $3x-y=0$. Tìm tọa độ điểm A và B.

3) Cho hình chữ nhật ABCD (AB > AD). Tìm vị trí điểm M trên cạnh của hình chữ nhật sao cho biểu thức $T=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}+MB^2+MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 5. (1,0 điểm) Cho a,b,c là các số dương thỏa mãn $a^3+b^3+c^3=3$.

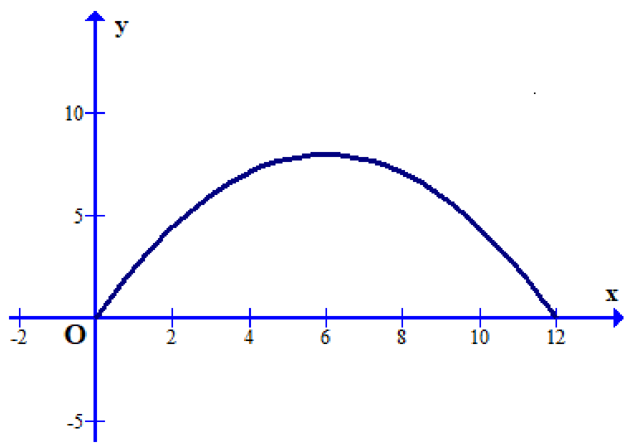
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=5(a^2+b^2+c^2)+4(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c})$.

Họ và tên thí sinh…………………………………. Số báo danh…………………………………………….

Cán bộ coi thi số 1……………………………. Cán bộ coi thi số 2………………………………………….

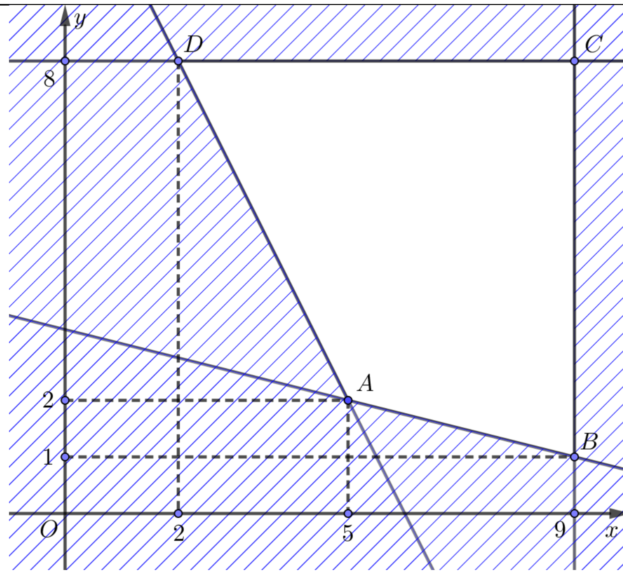
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HẢI DƯƠNG

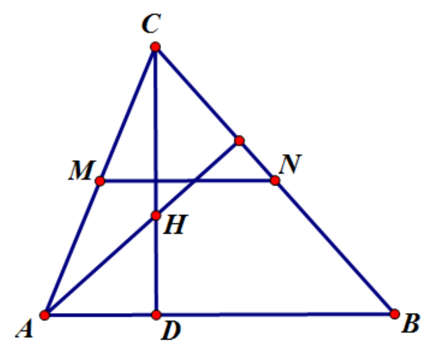
HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 10
NĂM HỌC 2022-2023
MÔN:TOÁN
(Hướng dẫn gồm 07 trang)

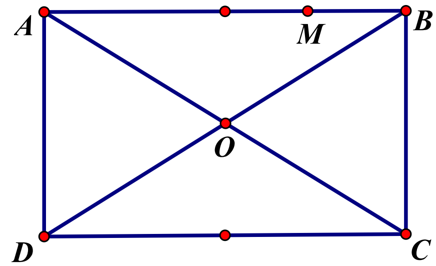
Câu	Đáp án	Điểm
Câu 1 (2,0 điểm)	**1)** Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-2mx+3m-2}}$ xác định trên $\mathbb{R}$.	
	a) Hàm số xác định trên R $\Leftrightarrow$ $x^2-2mx+3m-2>0, \forall x\in R$	0.25đ
	$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta<0\\ a=1>0\end{cases}$	0.25đ
	$\Leftrightarrow$ $m^2-3m+2<0$	0.25đ
	$\Leftrightarrow$ $1<m<2$. Vậy $1<m<2$	0.25đ
	2) Một chiếc cổng hình parabol có chiều cao $8m$ và khoảng cách giữa hai chân cổng là $12m$ như hình vẽ. Giả sử một chiếc xe tải có chiều ngang $4m$ và chiều cao là $7m$ đi vào vị trí chính giữa cổng. Hỏi xe tải có đi qua cổng được không?	
	Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.  Parabol có phương trình dạng $y=ax^2+bx$.	0,25
	Vì chiếc cổng hình parabol có chiều rộng 12 m và chiều cao 8m, theo hình vẽ ta có parabol đi qua các điểm $\mathrm{M}(12;0)$ và đỉnh $\mathrm{I}(6;8)$: $\begin{cases}144a+12b=0\\ 36a+6b=8\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-\dfrac{2}{9}\\ b=\dfrac{8}{3}\end{cases}$. Parabol có phương trình $y=-\dfrac{2}{9}x^2+\dfrac{8}{3}x$.	0,25
	Do chiếc xe tải có chiều ngang 4m đi vào vị trí chính giữa cổng nên xe sẽ chạm tường tại	0,25

	điểm $A(4;\frac{64}{9})$ và $B(4;\frac{64}{9})$.	
	Mà xe có chiều là 7m < $\frac{64}{9}$ m nên xe tải đi qua được	0,25
Câu 2 **(2,0 điểm)**	**1)** Giải phương trình $x^2-2x-3=\sqrt{x+3}$	
	Điều kiện: $x\ge -3$ PT (1): $\Leftrightarrow x^2-x+\frac{1}{4}=(x+3)+\sqrt{x+3}+\frac{1}{4}\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\sqrt{x+3}+\frac{1}{2}\right)^2$	0,25
	$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-\frac{1}{2}=\sqrt{x+3}+\frac{1}{2}\\ x-\frac{1}{2}=-\sqrt{x+3}-\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x-1=\sqrt{x+3} & (2)\\ x=-\sqrt{x+3} & (3)\end{array}\right.$	0,25
	Giải (2): $x-1=\sqrt{x+3}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\ x^2-2x+1=x+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\ x^2-3x-2=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{3+\sqrt{17}}{2}$	0,25
	Giải (3): $x=-\sqrt{x+3}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 0\\ x^2=x+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 0\\ x^2-x-3=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1-\sqrt{13}}{2}$ Vậy PT có 2 nghiệm $\left[\begin{array}{l}x=\frac{3+\sqrt{17}}{2}\\ x=\frac{1-\sqrt{13}}{2}\end{array}\right.$	0,25
	2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2xy-\sqrt{x+3}+2=0\\ (x-1)^2=2x(\sqrt{y^2+1}-1)\end{cases}$	
	ĐKXĐ: $x\ge -3$ PT (2) $\Leftrightarrow\ x^2-2x+1=2x\sqrt{y^2+1}-2x$ $\Leftrightarrow x^2+1=2x\sqrt{y^2+1}$ (=> x > 0) $\Leftrightarrow\ x^2-2x\sqrt{y^2+1}+y^2+1=y^2$ $\Leftrightarrow\ (x-\sqrt{y^2+1})^2=y^2$ $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-\sqrt{y^2+1}=y\\ x-\sqrt{y^2+1}=-y\end{array}\right.$	0,25

	TH1: $x-\sqrt{y^2+1}=-y \Leftrightarrow x+y=\sqrt{y^2+1}$ => $(x+y)^2=y^2+1$ => $2xy=1-x^2$ Thay vào PT (1) => $1-x^2-\sqrt{x+3}+2=0$ $\Leftrightarrow (x-1)(x+1)+\dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}+2}=0$ $\Leftrightarrow (x-1)(x+1+\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+2})=0$ Mà x > 0 => $x+1+\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+2}>0$ => x = 1 => y = 0	0,25
	TH2: $x-\sqrt{y^2+1}=y \Leftrightarrow x-y=\sqrt{y^2+1}$ => $(x-y)^2=y^2+1$ => $2xy=x^2-1$ Thay vào PT (1) => $x^2-1-\sqrt{x+3}+2=0$ $\Leftrightarrow (x-1)(x+1)-\dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}+2}=0$ $\Leftrightarrow (x-1)(x+1-\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+2})=0$ Mà x > 0 => $(x+1)(\sqrt{x+3}+2)>1.2=2>1$ => $x+1>\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+2}$ => x =1 => y = 0	0,25
	Thử lại (x; y) = (1; 0) thỏa mãn hệ phương trình. Vậy hệ có nghiệm duy nhất (x;y) = (1; 0) Chú thích: Nếu học sinh dùng phép biến đổi tương đương kết hợp điều kiện thì không cần thử lại.	0,25
Câu 3 (2,0 điểm)	**1)** Một công ty cần thuê xe để chở 120 người và 6,5 tấn hàng. Nơi thuê xe có hai loại xe A và B , trong đó loại xe A có 9 chiếc và loại xe B có 8 chiếc. Một chiếc xe loại A cho thuê với giá 4 triệu đồng, một chiếc xe loại B cho thuê với giá 3 triệu đồng. Biết rằng mỗi chiếc xe loại A có thể chở tối đa 20 người và 0,5 tấn hàng, mỗi chiếc xe loại B có thể chở tối đa 10 người và 2 tấn hàng. Hỏi phải thuê bao nhiêu xe mỗi loại để chi phí bỏ ra là thấp nhất?	
	Gọi x (xe), y (xe) lần lượt là số xe loại A và loại B cần phải thuê. Số tiền cần bỏ ra để thuê xe là: $f\left(x;y\right)=4x+3y$ (triệu đồng) Ta có x xe loại A và y xe loại B sẽ chở được $20x+10y$ người và $0,5x+2y$ tấn hàng.	0,25
	Theo đề bài, ta có hệ bất phương trình: $\begin{cases} 0\le x\le 9 \\ 0\le y\le 8 \\ 20x+10y\ge 120 \\ 0,5x+2y\ge 6,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x\le 9 \\ 0\le y\le 8 \\ 2x+y\ge 12 \\ x+4y\ge 13 \end{cases}$	0,25
	Miền nghiệm của hệ bất phương trình trên là tứ giác $ABCD$ (kể cả biên) với $A\left(5;2\right)$, $B\left(9;1\right)$, $C\left(9;8\right)$, $D\left(2;8\right)$ như hình vẽ	0,25

	 Ta có: $f\left(5;2\right)=26$; $f\left(9;1\right)=39$; $f\left(9;8\right)=60$; $f\left(2;8\right)=32$	
	Suy ra $f\left(x;y\right)$ nhỏ nhất khi $\left(x;y\right)=\left(5;2\right)$ Vậy để chi phí thuê là thấp nhất thì cần thuê 5 xe loại A và 2 xe loại B. *Chú thích: Nếu học sinh dùng bất đẳng thức đại số:* $(4x+3y)=\frac{13}{7}(2x+y)+\frac{2}{7}(x+4y)\geq 26$ *thì vẫn được điểm tối đa.*	0,25
	2) Từ các chữ số $1,2,3,4,5,6,7,8,9$ lập được bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số đôi một khác nhau sao cho trong đó luôn có ba chữ số $1,2,3$ và tồn tại ba chữ số có tổng bằng 8?	
	Ta có $8=1+2+5=1+3+4$. Vì trong số cần lập luôn có ba chữ số $1,2,3$ nên trong ba chữ số còn lại cần có ít nhất một chữ số thuộc $\{4;5\}$	0,25
	Trường hợp 1: Số cần lập có một chữ số thuộc $\{4;5\}$, có $C_2^1\cdot C_4^2\cdot 6!=8640$ (số).	0,25
	Trường hợp 2: Số cần lập có hai chữ số thuộc $\{4;5\}$, có $C_2^2\cdot C_4^1\cdot 6!=2880$ (số).	0,25
	Vậy số các số cần lập là $8640+2880=11520$.	0,25
Câu 4 (3 điểm)	1) Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh là $BC=a, CA=b, AB=c$; góc $A=60^0$ và $\frac{b-c}{a+c}=2(\cos B-1)$ Tính số đo các góc B và C.	

	Có $\widehat{A}=60^0$ nên $b^2+c^2-a^2=bc \Leftrightarrow a^2-b^2=c^2-bc \quad (1)$ $\Leftrightarrow a^2-c^2=b^2-bc \quad (2)$	0,25
	Ta có $\dfrac{b-c}{a+c}=2(\cos B-1)$ $\Leftrightarrow \dfrac{b-c}{a+c}=\dfrac{a^2+c^2-b^2-2ac}{ac}$ $\Leftrightarrow \dfrac{b-c}{a+c}=\dfrac{2c-b-2a}{a}$	0,25
	Do đó $(b-c).a=(a+c)(2c-b-2a)$ => $2ab-ca=2(c^2-a^2)-cb$ Thay $c^2-a^2=bc-b^2$ vào biêu thức trên ta được: $2ab-ca=bc-2b^2$ ⇔ $(a+b)(2b-c)=0$ ⇔ c = 2b	0,25
	Thay vào (1) được $a^2+b^2=c^2$. Tam giác ABC vuông tại C và khi đó $\widehat{B}=30^o$.	0,25
	2) Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $C(3;4)$, đường thẳng đi qua trung điểm các cạnh CA và CB có phương trình $2x-4y+5=0$. Đường cao kẻ từ A của tam giác ABC có phương trình $3x-y=0$. Tìm tọa độ điểm A và B.  	
	Ta có CB vuông góc AH => Đường thẳng CB là (CB): $x+3y+c=0$ Mà CB đi qua C(3;4) => c = -15 => (CB): $x+3y-15=0$	0,25
	Trung điểm N của đoạn CB là nghiệm của hệ $\begin{cases} x+3y-15=0 \\ 2x-4y+5=0 \end{cases}$ => $N(\frac{9}{2};\frac{7}{2})$ ⇨ B(6; 3)	0,25
	Đường thẳng AB // MN => đường thẳng AB là (AB): $2x-4y+m=0$ (m khác 5) Mà AB đi qua B(6;3) => m = 0 => (AB): $x-2y=0$	
	Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-2y=0 \\ 3x-y=0 \end{cases}$ => A(0;0)	0,25
	3) Cho hình chữ nhật ABCD (AB > AD). Tìm vị trí điểm M trên cạnh của hình chữ nhật sao cho	

	biểu thức $T=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}+MB^2+MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. 	
	Từ $(\overrightarrow{AC})^2=(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MA})^2=MC^2+MA^2-2\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$ => $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}(MA^2+MC^2-AC^2)$ Thay vào có $T=\frac{1}{2}(MA^2+MC^2)+(MB^2+MD^2)-\frac{1}{2}AC^2$	0,25
	Gọi O là tâm của hình chữ nhật ABCD Có: $MA^2+MC^2=(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA})^2+(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC})^2=MO^2+OA^2+2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OA}+MO^2+OC^2+2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OC}$ $=2OM^2+OA^2+OC^2+2\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})=2OM^2+OA^2+OC^2$ $MB^2+MD^2=(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB})^2+(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OD})^2=MO^2+OB^2+2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OB}+MO^2+OD^2+2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OD}$ $=2OM^2+OB^2+OD^2+2\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})=2OM^2+OB^2+OD^2$	0,25
	Thay vào $T=OM^2+\frac{1}{2}(OA^2+OC^2)+2OM^2+OB^2+OD^2-\frac{1}{2}AC^2$ ⇨ $T=3OM^2+\frac{1}{4}AC^2$	0,25
	Độ dài AC cố định, T nhỏ nhất ⇔ OM nhỏ nhất => M là hình chiếu của O trên cạnh hình chữ nhật. Do hình chữ nhật có AB > BC nên OM nhỏ nhất khi M là hình chiếu của O trên AB hoặc CD, tức M là trung điểm AB hoặc CD. Chú thích: Nếu học sinh dùng công thức đường trung tuyến thì vẫn được điểm tối đa	0,25
Câu 5 (1.0 điểm)	**5.** Cho a,b,c là các số dương thỏa mãn $a^3+b^3+c^3=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=5(a^2+b^2+c^2)+4(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})$.	
	Có $P=(5a^2+\frac{4}{a})+(5b^2+\frac{4}{b})+(5c^2+\frac{4}{c})$ Vì $a^3+b^3+c^3=3$ và $a,b,c>0$ nên $0<a,b,c<\sqrt[3]{3}$. Ta *chứng minh:* $5a^2+\frac{4}{a}\geq 2a^3+7$ *(1)*	0,25
	(1) ⇔ $5a^3+4\geq 2a^4+7a$ ⇔ $2a^4-5a^3+7a-4\leq 0$	0,25

<table>
<tr><td></td><td>$\Leftrightarrow\ (a-1)^2(2a^2-a-4)\le 0$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Ta chứng minh $2a^2-a-4<0$ với $0<a<\sqrt[3]{3}$
Ta lập bảng biến thiên của hàm số $f(a)=2a^2-a-4$ trên $(0;\sqrt[3]{3})$
<table>
<tr><td>a</td><td>0</td><td>¼</td><td>$\sqrt[3]{3}$</td></tr>
<tr><td>f(a)</td><td>-4</td><td>$f(\frac{1}{4})$</td><td>$f(\sqrt[3]{3})$</td></tr>
</table>
Có $f(0)=-4<0$
Có $f(\sqrt[3]{3})=2\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}-4<0\ \Leftrightarrow\ 2\sqrt[3]{9}<\sqrt[3]{3}+4$
$\Leftrightarrow\ 72<3+3.\sqrt[3]{3}.4(\sqrt[3]{3}+4)+64$ (luôn đúng do $\sqrt[3]{3}>1$)
Như vậy (1) được chứng minh và dấu "=" xảy ra khi a = 1.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td>Chứng minh tương tự với b và c, ta có $5b^2+\frac{4}{b}\ge 2b^3+7$ và $5c^2+\frac{4}{c}\ge 2c^3+7$
Cộng theo vế ta được $P\ge 2(a^3+b^3+c^3)+21=27$
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ a = b = c = 1</td><td>0,25</td></tr>
</table>

HS làm cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa