SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
QUẢNG NGÃI

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LỚP 9
NĂM HỌC 2022 - 2023

Ngày thi 16/02/2023
Môn: Toán
Thời gian làm bài: 150 phút

Bài 1. (4,0 điểm)

1) Tìm số nguyên tố p sao cho $p+10$ và $p+14$ là các số nguyên tố.

2) Tìm tất cả các nghiệm nguyên x, y của phương trình $x^2+xy-2x-3y-4=0$.

3) Cho ba số $a,b,c \in Z$ thoả mãn $a+b+c=2022^{2023}$. Chứng minh $a^3+b^3+c^3$ chia hết cho 6.

Bài 2. (4,0 điểm)

1) Cho biểu thức: $M=\left(1-\dfrac{2\sqrt{x}}{x+1}\right):\left(\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}-\dfrac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}+x+1}\right)$, với $x \ge 0$.

Rút gọn biểu thức M và tính giá trị của biểu thức M khi $x=2023-2\sqrt{2022}$.

2) Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{y}{y+1}+\dfrac{z}{z+1}$.

Bài 3. (4,0 điểm)

1) Giải phương trình $\sqrt{x+3}+2x\sqrt{x+1}=2x+\sqrt{x^2+4x+3}$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+x+\dfrac{1}{y}\left(1+\dfrac{1}{y}\right)=4 \\ x^3+\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{1}{y^3}=4 \end{cases}$.

Bài 4. (7,0 điểm)

1) Một học sinh có tấm bìa hình vuông $ABCD$ cạnh 20 cm. Em muốn cắt tấm bìa này thành bốn hình tam giác vuông bằng nhau và phần còn lại là hình vuông $MNPQ$ thỏa mãn M,N,P,Q lần lượt thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA. Hãy xác định vị trí các điểm M,N,P,Q để diện tích hình vuông $MNPQ$ là nhỏ nhất.

2) Cho đường tròn tâm O đường kính $AB=2R$. Điểm M di động trên đoạn OA (M khác A), vẽ đường tròn tâm K đường kính MB. Gọi I là trung điểm của đoạn MA, đường thẳng đi qua I vuông góc với AB cắt đường tròn (O) tại C và D. Đường thẳng CB cắt đường tròn (K) tại P.

a) Chứng minh rằng ba điểm P, M, D thẳng hàng.

b) Chứng minh rằng PI là tiếp tuyến của đường tròn (K).

c) Tìm vị trí của M trên đoạn OA để diện tích tam giác IPK lớn nhất.

Bài 5. (1,0 điểm)

Người ta làm một cái hộp hình vuông để đựng được 5 cái bánh hình tròn có đường kính 6cm, sao cho không có bất kì hai cái bánh nào được chồng lên nhau. Hãy tính cạnh nhỏ nhất của cái hộp.

——— HẾT ———

Ghi chú: *Giám thị coi thi không giải thích gì thêm.*

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO QUẢNG NGÃI	KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LỚP 9 NĂM HỌC 2022 - 2023
ĐỀ CHÍNH THỨC	Ngày thi 16/02/2023 Môn: Toán Thời gian làm bài: 150 phút
(Hướng dẫn chấm có 6 trang)	

HƯỚNG DẪN CHẤM

Bài 1. (4,0 điểm)

1) Tìm số nguyên tố p sao cho $p+10$ và $p+14$ là các số nguyên tố.

2) Tìm tất cả các nghiệm nguyên x, y của phương trình $x^2+xy-2x-3y-4=0$.

3) Cho ba số $a,b,c \in Z$ thoả mãn $a+b+c=2022^{2023}$. Chứng minh $a^3+b^3+c^3$ chia hết cho 6.

Tóm tắt cách giải	Điểm
1.1) * Với p = 2 thì p + 10 = 12 là hợp số. * Với p = 3 thì p + 10 = 13 và p + 14 = 17 là các số nguyên tố. * Với p > 3 mà p là số nguyên tố nên p có dạng: p = 3k + 1 hoặc p = 3k + 2 ($k \in N^*$) - Nếu p = 3k + 1 thì p + 14 = 3(k + 5) $\vdots$ 3 là hợp số. - Nếu p = 3k + 2 thì p + 10 = 3(k + 4) $\vdots$ 3 là hợp số. Vậy p = 3 thì p + 10 và p + 14 là các số nguyên tố.	 0,25 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm
1.2) Ta có : $x^2+xy-2x-3y-4=0$. $\Leftrightarrow x^2-3x+xy-3y+x-3=1$ $\Leftrightarrow x(x-3)+y(x-3)+x-3=1$ $\Leftrightarrow (x-3)(x+y+1)=1$ Ta có các trường hợp sau: TH1: $\begin{cases} x-3=1 \\ x+y+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-4 \end{cases}$ TH2: $\begin{cases} x-3=-1 \\ x+y+1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-4 \end{cases}$ Vậy nghiệm nguyên của pt là $(x;y)=(4;-4),(2;-4)$	 0,25 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm
1.3) Ta có: $a^3+b^3+c^3=\left(a^3-a\right)+\left(b^3-b\right)+\left(c^3-c\right)+\left(a+b+c\right)$ $a^3-a=\left(a-1\right)a\left(a+1\right)\vdots 6$ (tích ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 6). Tương tự $b^3-b \vdots 6$, $c^3-c \vdots 6$ và có $2022 \vdots 6 \Rightarrow a+b+c=2022^{2023} \vdots 6$ Vậy $a^3+b^3+c^3 \vdots 6$	0,25 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm

Bài 2. (4,0 điểm)

1) Cho biểu thức: $M=\left(1-\dfrac{2\sqrt{x}}{x+1}\right):\left(\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}-\dfrac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}+x+1}\right)$, với $x\ge 0$.

Rút gọn biểu thức M và tính giá trị của biểu thức M khi $x=2023-2\sqrt{2022}$.

2) Cho ba số dương x,y,z thỏa mãn $x+y+z=1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{y}{y+1}+\dfrac{z}{z+1}$.

Tóm tắt cách giải	Điểm
2.1) Với điều kiện $x\ge 0$. Ta có: $M=\left(1-\dfrac{2\sqrt{x}}{x+1}\right):\left(\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}-\dfrac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}+x+1}\right)$ $=\dfrac{x-2\sqrt{x}+1}{x+1}:\left(\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}-\dfrac{2\sqrt{x}}{(x+1)(1+\sqrt{x})}\right)$ $=\dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{x+1}:\dfrac{x+1-2\sqrt{x}}{(x+1)(1+\sqrt{x})}$ $=\dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2(x+1)(1+\sqrt{x})}{(x+1)(\sqrt{x}-1)^2}=1+\sqrt{x}.$ Khi $x=2023-2\sqrt{2022}=(\sqrt{2022}-1)^2$ Thì $M=1+\sqrt{(\sqrt{2022}-1)^2}=\sqrt{2022}$	 0,5 điểm 0,5 điểm 0,5 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm
2.2) Ta có : $\dfrac{x}{x+1}=1-\dfrac{1}{x+1};\dfrac{y}{y+1}=1-\dfrac{1}{y+1};\dfrac{z}{z+1}=1-\dfrac{1}{z+1}$ $P=\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{y}{y+1}+\dfrac{z}{z+1}=3-\left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{y+1}+\dfrac{1}{z+1}\right)$ (*) Áp dụng bất đẳng thức AM-GM với 3 số dương $a,b,c;\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{b},\dfrac{1}{c}$ ta có $a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc};\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\ge 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{abc}}$ Nhân từng vế hai bđt ta được $\left(a+b+c\right)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\ge 9\Rightarrow \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\ge\dfrac{9}{a+b+c}$ Dấu "=" xảy ra khi a= b= c Áp dụng bđt trên vào (*) ta được $P\le 3-\dfrac{9}{x+1+y+1+z+1}=3-\dfrac{9}{4}=\dfrac{3}{4}$ Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}x+y+z=1\\x+1=y+1=z+1\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z=\dfrac{1}{3}$ Vậy maxP=$\dfrac{3}{4}$ *khi* $x=y=z=\dfrac{1}{3}$	 0,25 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm 0,5 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm

Bài 3. (4,0 điểm)

1) Giải phương trình $\sqrt{x+3}+2x\sqrt{x+1}=2x+\sqrt{x^2+4x+3}$.

2) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+x+\dfrac{1}{y}(1+\dfrac{1}{y})=4 \\ x^3+\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{1}{y^3}=4 \end{cases}$.

Tóm tắt cách giải	**Điểm**
3.1) ĐK: $x \ge -1$	0,25 điểm
Ta có: $\sqrt{x+3}+2x\sqrt{x+1}=2x+\sqrt{(x+3)(x+1)} \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+3}-2x\right)\left(\sqrt{x+1}-1\right)=0$	0,5 điểm
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+3}=2x\,(1) \\ \sqrt{x+1}=1\,(2) \end{array}\right.$	0,25 điểm
$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \ge 0 \\ 4x^2-x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ (x-1)(4x+3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$ (TM)	0,5 điểm
(2) $\Leftrightarrow$ x=0 (TM)	0,25 điểm
Vậy S= $\{0;1\}$	0,25 điểm
3.2) Đk: $y \ne 0$.	0,25 điểm
Hệ tương đương với $\begin{cases} x^2+\dfrac{1}{y^2}+x+\dfrac{1}{y}=4 \\ x^3+\dfrac{1}{y^3}+\dfrac{x}{y}(x+\dfrac{1}{y})=4 \end{cases}$.	0,25 điểm
Đặt $\begin{cases} u=x+\dfrac{1}{y} \\ v=\dfrac{x}{y} \end{cases}$, Ta được hệ phương trình:	0,25 điểm
$\begin{cases} u^2+u-2v=4 \\ u^3-2uv=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2-4u+4=0 \\ u^2+u-4=2v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=2 \\ v=1. \end{cases}$	0,5 điểm
Với $\begin{cases} u=2 \\ v=1 \end{cases}$ ta được $\begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=2 \\ \dfrac{x}{y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ (thoả mãn điều kiện)	0,5 điểm
Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(1;1)$.	0,25 điểm

Bài 4. (7,0 điểm)

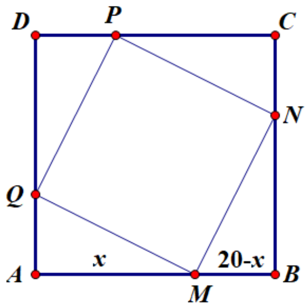
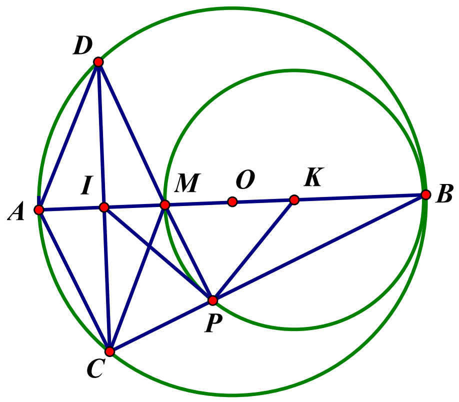
1) Một học sinh có tấm bìa hình vuông $ABCD$ cạnh 20 *cm*. Em muốn cắt tấm bìa này thành bốn hình tam giác vuông bằng nhau và phần còn lại là hình vuông $MNPQ$ thỏa mãn M, N, P, Q lần lượt thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA. Hãy xác định vị trí các điểm M, N, P, Q để diện tích hình vuông $MNPQ$ là nhỏ nhất.

2) Cho đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$. Điểm M di động trên đoạn OA (M khác A), vẽ đường tròn tâm K đường kính MB. Gọi I là trung điểm của đoạn MA, đường thẳng đi qua I vuông góc với AB cắt đường tròn (O) tại C và D. Đường thẳng CB cắt đường tròn (K) tại P.

a) Chứng minh rằng ba điểm P, M, D thẳng hàng.

b) Chứng minh rằng PI là tiếp tuyến của đường tròn (K).

c) Tìm vị trí của M trên đoạn OA để diện tích tam giác IPK lớn nhất.

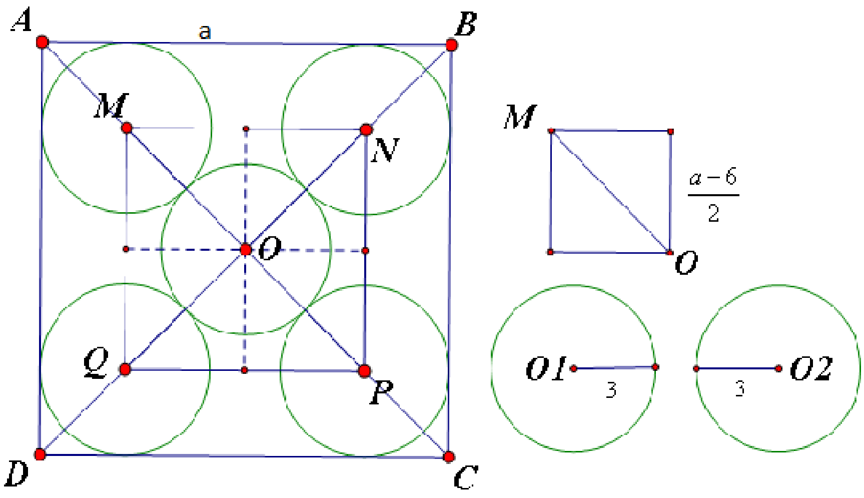
<table>
<tr><th>Tóm tắt cách giải</th><th>Điểm</th></tr>
<tr><td>
</td><td>0,5 điểm</td></tr>
<tr><td>Lấy các điểm $M \in AB; N \in BC; P \in CD; Q \in DA$ sao cho
AM = BN = CP = DQ.
$\Rightarrow$BM = CN = DP = AQ $\Rightarrow \Delta BMN = \Delta CNP = \Delta DPQ = \Delta AQM$ (c.g.c)
$\Rightarrow MN = NP = PQ = QM$ và $\widehat{NMB} = \widehat{MQA} \Rightarrow \widehat{NMB} + \widehat{QMA} = 90^0 \Rightarrow \widehat{NMQ} = 90^0$
Do đó tứ giác MNPQ là hình vuông.
Diện tích MNPQ nhỏ nhất khi diện tích các tam giác vuông là lớn nhất
Đặt AM = x thì MB = AQ = 20 – x
$S_{AMQ} = \frac{1}{2} AQ.AM$ lớn nhất khi AQ.AM lớn nhất.
Mà AQ + AM = 20 (cm) không đổi nên AQ.AM lớn nhất khi AQ = AM hay x = 20 – x $\Leftrightarrow$ x = 10
Vậy chọn M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA ta được diện tích hình vuông MNPQ nhỏ nhất.</td><td>0,25 điểm
0,25 điểm
0,25 điểm
0,25 điểm
0,25 điểm
0,25 điểm</td></tr>
<tr><td>
</td><td>0,5 điểm</td></tr>
</table>

a) Ta có: $\widehat{MPB} = \widehat{ACB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) Từ đó $PM // AC$. (1) Đường kính $AB \perp CD$ nên I là trung điểm của CD. Mà I là trung điểm của AM nên tứ giác $ADMC$ là hình bình hành. Vậy $DM // AC$.(2). Từ (1) và (2) suy ra P, M, D thẳng hàng.	0,25 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm
b) Ta có $\widehat{CBA} = \widehat{CDP}$ (cùng phụ với $\widehat{DCB}$). Do tam giác PKB cân tại K nên $\widehat{CBA} = \widehat{KPB}$. Ta lại có $\widehat{CDP} = \widehat{IPD}$ (do tam giác IPD cân tại I) Suy ra $\widehat{IPD} = \widehat{KPB}$ mà $\widehat{DPB}$=1v, suy ra $\widehat{IPK} = 90^0$ nên $IP \perp KP$. Hay PI là tiếp tuyến của (K).	0,25 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm 0,5 điểm 0,25 điểm
c) Vì $KM = \frac{1}{2}MB$ và $IM = \frac{1}{2}AM$ nên $IK = \frac{1}{2}AB = R$ Áp dụng định lý Pytago có $PI^2 + PK^2 = IK^2 = R^2$.(không đổi) . Mặt khác $4S^2 = PI^2.PK^2$. (S là diện tích của tam giác IKP) . Do đó $max\left(4S^2\right) \Leftrightarrow \max S$ khi $PI = PK = R\sqrt{\frac{1}{2}}$ mà $BM = 2PK \Rightarrow BM = \sqrt{2}R$. Vậy M cách B một khoảng bằng $\sqrt{2}$ R thì diện tích tam giác IPK lớn nhất.	0,25 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm 0,25 điểm

Bài 5. (1,0 điểm)

Người ta làm một cái hộp hình vuông để đựng được 5 cái bánh hình tròn có đường kính $6cm$, sao cho không có bất kì hai cái bánh nào được chồng lên nhau. Hãy tính cạnh nhỏ nhất của cái hộp.

Tóm tắt cách giải	**Điểm**
Giả sử đáy cái hộp bánh là hình vuông ABCD Gọi O là tâm hình vuông ABCD cạnh là a>6 chứa 5 cái bánh hình tròn bán kính bằng 3cm sao cho không có bất kì hai cái bánh nào trong chúng có điểm trong chung. Suy ra tâm của năm hình tròn này nằm trong hoặc trên cạnh hình vuông MNPQ tâm O có cạnh là (a – 6) ($M \in OA; N \in OB$; MN//AB và MN cách AB một khoảng 3cm). Các đường trung bình của hình vuông MNPQ chia hình vuông này thành 4 hình vuông nhỏ bằng nhau.	0,25 điểm

 	
Theo nguyên lí Dirichlet tồn tại một hình vuông nhỏ chứa ít nhất hai trong năm tâm của 5 cái bánh hình tròn nói trên, chẳng hạn đó là O_1 và O_2.	0,25 điểm
Do 5cái bánh hình tròn này không có hai cái bánh nào có điểm trong chung nên $O_1O_2 \geq 6$ (1) Mặt khác O_1O_2 cũng nằm trong hoặc trên cạnh hình vuông nhỏ có cạnh là $\frac{a-6}{2}$ nên $O_1O_2 \leq OM = \frac{a-6}{2}.\sqrt{2}$ (2) (trong đó $\frac{a-6}{2}.\sqrt{2}$ là đường chéo hình vuông nhỏ) Từ (1), (2) suy ra $\frac{a-6}{2}.\sqrt{2} \geq 6 \Leftrightarrow a \geq 6\sqrt{2}+6$.	0,25 điểm
Vậy cạnh nhỏ nhất của hộp bánh hình vuông ABCD là $6\sqrt{2}+6$ (cm)	0,25 điểm

<u>Ghi chú</u> : + Mỗi bài toán có thể có nhiều cách giải, học sinh giải cách khác mà đúng thì vẫn cho điểm tối đa. Tổ chấm thảo luận thống nhất biểu điểm chi tiết cho các tình huống làm bài của học sinh.

+ Điểm từng bài và toàn bài không làm tròn số.