

Lưu ý: thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay.

Câu 1: (4,0 điểm)

a) Rút gọn biểu thức: $L = \frac{4 + \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}} + \frac{4 - \sqrt{5}}{\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5}}$.

b) Cho a, b, c, d là các số thực không nhỏ hơn 1 thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 16$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = \sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} + \sqrt{c-1} + \sqrt{d-1}$.

Câu 2: (5,0 điểm)

a) Giải phương trình: $2x^3 - x^2 - 3x + 1 = \sqrt{x^5 + x^4 + 1}$.

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 1 \\ x^3 + y^3 = x + 3y. \end{cases}$$

Câu 3: (5,0 điểm)

Cho điểm A nằm ngoài đường tròn $(O; R)$. Từ A vẽ hai tiếp tuyến AM, AN đến đường tròn (O) (M, N là hai tiếp điểm). Trên nửa mặt phẳng bờ AO chứa điểm N , vẽ cát tuyến ABC không đi qua tâm O (B nằm giữa A và C). Gọi I là trung điểm của BC ; NM cắt AC, AO lần lượt tại K và H .

a) Chứng minh $NIOM$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $AK.AI = AB.AC$.

c) AO cắt (O) tại hai điểm P, Q ($AP < AQ$). Gọi D là trung điểm của HQ . Đường thẳng qua H vuông góc với MD tại S và cắt MP tại E . Chứng minh P là trung điểm của ME .

Câu 4: (3,0 điểm)

Cho đường tròn $(O; R)$, hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. E là điểm trên cung nhỏ BC (E khác B và C). Gọi M là giao điểm của AB và ED , N là giao điểm của CD và EA . Chứng minh $AM + DN \geq 2\sqrt{2}R$.

Câu 5: (3,0 điểm)

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn: $(x + y + 1)(xy + x + y) = 9 + 4(x + y)$.

b) Cho các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 = c^2$. Chứng minh ab chia hết cho $a + b + c$.

—————HẾT—————

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.