

Môn thi: TOÁN
Thời gian: 180 phút (không kể thời gian phát đề)
Ngày thi: 22/10/2023

Bài 1. (5,0 điểm)

1. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{x + \sqrt{x^2 - x}}{\sqrt{y-1}} = 2 + \sqrt{y(y-1)} \\ \frac{y + \sqrt{y^2 - y}}{\sqrt{z-1}} = 2 + \sqrt{z(z-1)} \\ \frac{z + \sqrt{z^2 - z}}{\sqrt{x-1}} = 2 + \sqrt{x(x-1)}. \end{cases}$$

2. Tìm tất cả các tam giác có độ dài ba cạnh là ba số hạng đầu của một cấp số cộng có công sai là d (d nguyên, khác 0) và có bán kính đường tròn nội tiếp bằng 3.

Bài 2. (3,0 điểm)

Cho dãy số $(u_n), n = 1, 2, \dots$ được xác định bởi:
$$\begin{cases} u_1 = \frac{2}{3} \\ u_n = \frac{-(n+1)}{9[n+(n-1)u_{n-1}]} \text{ với } n \geq 2. \end{cases}$$

Tìm $\lim u_n$.

Bài 3. (5,0 điểm)

1. Tìm đa thức $P(x)$ thỏa mãn
$$\begin{cases} P(-\sqrt{2}) = -4, P(\sqrt{2}) = -4 \\ (x^2 - 4).P(x^2) = (x^6 - 4x^2).P(x), \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

2. Cho đa giác đều n đỉnh ($n \geq 8$). Biết rằng có 25 tứ giác có 4 cạnh là các đường chéo của đa giác. Hãy tìm n .

Bài 4. (5,0 điểm)

Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC . Gọi BI, CJ lần lượt là các đường phân giác trong của góc \hat{B}, \hat{C} . Các tia JI, IJ lần lượt cắt đường tròn (O) tại D, E . Gọi M, N, P lần lượt là chân đường vuông góc của D lên các đường thẳng AB, AC, BC . Chứng minh rằng:

a) $NM = NP$ khi và chỉ khi DI là phân giác của góc \widehat{ADC} .

b) $\frac{1}{BE} + \frac{1}{CD} = \frac{1}{AE} + \frac{1}{AD} + \frac{1}{BD} + \frac{1}{CE}$.

Bài 5. (2,0 điểm)

Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn: $x + y + z \geq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức
$$P(x, y, z) = \frac{1}{(2x + y + z)^2} + \frac{1}{(x + 2y + z)^2} + \frac{1}{(x + y + 2z)^2}.$$

----- HẾT -----