UBND TỈNH THÁI NGUYÊN **SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**	**THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LỚP 10** **MÔN THI: TOÁN** **NĂM HỌC: 2022-2023**
ĐỀ THI CHÍNH THỨC	*Thời gian làm bài:150 phút, không kể thời gian phát đề*

Bài 1 (4 điểm). Cho parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $d: y=mx+1$ (với m là tham số).

a. Chứng minh rằng với mọi giá trị thực của m, đường thẳng d luôn cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt.

b. Gọi A, B là giao điểm của đường thẳng d và parabol (P); H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B lên trục Ox. Tìm tất cả các giá trị thực của m để diện tích hình thang $ABKH$ bằng 3 lần diện tích tam giác AOB, với O là gốc tọa độ.

Bài 2 (4 điểm).

a. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\sqrt{2x^2-2mx+m+2}=x$ có hai nghiệm phân biệt.

b. Một cơ sở sản xuất làm hai loại sản phẩm A và B. Mỗi kg sản phẩm A cần 1,5 kg nguyên liệu và 2 giờ làm và có lợi nhuận là 20000 đồng; mỗi kg sản phẩm B cần 2 kg nguyên liệu và 4 giờ làm và có lợi nhuận 30000 đồng. Biết cơ sở sản xuất có 240 kg nguyên liệu và 400 giờ làm. Cơ sở sản xuất nên làm mỗi loại sản phẩm bao nhiêu kg để có mức lợi nhuận cao nhất?

Bài 3 (4 điểm).

a. Tìm tất cả các hàm số $f(x)=x^2+ax+b$, với $a,b\in\mathbb{R}$, thỏa mãn:

$$f(f(0))=f(f(1))=f(f(2)).$$

b. Trong một gia đình, người có tuổi thấp nhất là 1 tuổi và người có tuổi cao nhất là 80 tuổi. Biết rằng trong gia đình đó, mỗi người có tuổi lớn hơn 1 thì tuổi của người đó hoặc bằng tổng số tuổi của hai người khác trong gia đình hoặc gấp đôi tuổi của một người khác trong gia đình. Hỏi gia đình đó có ít nhất bao nhiêu người? (Tuổi của mỗi người trong gia đình là số nguyên dương và khác nhau)

Bài 4 (6 điểm). Cho tam giác ABC vuông tại A và $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$. Gọi AH là đường cao của tam giác ABC.

a. Chứng minh rằng $a^2\overrightarrow{AH}=b^2\overrightarrow{AB}+c^2\overrightarrow{AC}$.

b. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng nếu $4MH=\sqrt{3}BC$ thì $a^2=4bc$.

c. Tìm điểm N sao cho $2NA^2+NB^2+NC^2=\dfrac{3a^2}{4}$.

Bài 5 (2 điểm). Cho hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn: $f(x^2-y^2)+f(2y)\ge f(2x), \forall x,y\in\mathbb{R}$.

Chứng minh rằng $f(x)\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

------- Hết -------